

ÖSTERREICHISCHES INGENIEUR-ARCHIV

HERAUSGEGEBEN VON

K. FEDERHOFER-GRAZ · P. FUNK-WIEN · W. GAUSTER-RALEIGH, USA.

K. GIRKMANN-WIEN · F. JUNG-WIEN · F. MAGYAR-WIEN

E. MELAN-WIEN · H. MELAN-WIEN

SCHRIFTFÜHRUNG

F. MAGYAR-WIEN

BAND VI, HEFT 3

MIT 69 TEXTABBILDUNGEN

(ABGESCHLOSSEN AM 28. MAI 1952)



WIEN
SPRINGER-VERLAG
1952

Das

Österreichische Ingenieur-Archiv

erscheint zwanglos nach Maßgabe der eingelaufenen Arbeiten in Heften von wechselndem Umfang, die in kurzer Folge zur Ausgabe gelangen. Diese Hefte werden zu Bänden von 25 bis 30 Bogen vereinigt. Der Preis eines Heftes richtet sich nach seinem Umfang und nach den entstandenen Herstellungskosten.

Die für das Österreichische Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind

an die *Schriftleitung des Österreichischen Ingenieur-Archivs (Springer-Verlag)*
Wien I, Mülkerbastei 5

zu senden.

Die Manuskripte können in deutscher, englischer oder französischer Sprache erscheinen. Es soll ihnen eine Zusammenfassung möglichst in diesen drei Sprachen vorangestellt werden. Eine Zusammenfassung ist auf jeden Fall vom Verfasser, und zwar in einem Höchstumfang von acht Schreibmaschinenzeilen mitzulefern, ihre Übersetzungen werden nötigenfalls vom Verlag besorgt.

Die Manuskripte sollen in klarer Ausdrucksweise und unter Hinweglassung jedes überflüssigen Ballastes abgefaßt sein. Von Abbildungen ist sehr sparsamer Gebrauch zu machen, da sie die Drucklegung der Beiträge verzögern und auch den Preis der Zeitschrift verteuern. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Zeichnungen (Beschriftungen nur in Bleistift ausführen) oder in klaren, verständlichen Handskizzen bestehen. Die Beschriftung und nötigenfalls die Einzelzeichnung nimmt der Verlag vor.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs veröffentlicht. Beiträge, welche bereits an anderer Stelle in wörtlich oder auch nur inhaltlich gleicher Fassung publiziert worden sind, können nicht aufgenommen werden. Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht.

Die Mitarbeiter erhalten 75 Sonderdrucke ihrer Beiträge kostenlos und können weitere Exemplare (maximal 125 Exemplare), falls bei Rücksendung der ersten Korrektur bestellt, gegen angemessene Entschädigung geliefert erhalten.

Springer-Verlag, Wien I, Mülkerbastei 5

Fernsprecher U 26-5-60 Serie — Telegrammadresse Springerbuch Wien

Band VI, Heft 3

Inhaltsverzeichnis

Originalarbeiten

	Seite
H. Craemer , Die Abhängigkeit der Festigkeit von der Größe der Versuchskörper, betrachtet auf Grund der Wahrscheinlichkeitsrechnung. (Mit 14 Textabbildungen)	145
E. Skudrzyk , Die innere Reibung und die elastischen Eigenschaften fester, flüssiger und gasförmiger Körper II. (Mit 22 Textabbildungen)	157
W. Müller , Zur Theorie des Reibungsstoßes einer Kugel gegen eine ebene Wand und gegen eine zweite Kugel. (Mit 10 Textabbildungen)	196
H. Radek , Ein Problem verketteter Wahrscheinlichkeiten	208
K. Jäger , Ein werkstoffgerechtes Verfahren zur Bemessung von Durchlaufbalken aus Stahlbeton. (Mit 5 Textabbildungen)	223
W. Raher , Allgemeine Stabilitätsbedingung für krumme Stäbe. (Mit 3 Textabbildungen) ..	236
R. Bereis , Die Fernpolstellung der ebenen Bewegung. (Mit 5 Textabbildungen)	246
K. Girkmann und E. Tungl , Zum Anschluß von Stäben mit Winkelquerschnitt. (Mit 4 Textabbildungen)	255
R. Bereis , Perspektiver Schnellriß. (Mit 6 Textabbildungen)	265

Buchbesprechungen

Collatz, L., Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen (P. Funk). — Cornelius, P., Kurze Zusammenfassung der Elektrizitätslehre (H. Sequenz). — Federhofer, K., Prüfungs- und Übungsaufgaben aus der Mechanik des Punktes und des starren Körpers, Teil I—III (K. Girkmann). — Hartög, J. P. den, Mechanische Schwingungen, 2. Aufl. (F. Magyar). — Schuisky, W., Elektromotoren (H. Sequenz). — Watzlawek, H., Gewöhnliche Differentialgleichungen (L. Peczar).

Die Abhängigkeit der Festigkeit von der Größe der Versuchskörper, betrachtet auf Grund der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Von H. Craemer, Alexandria.

Mit 14 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Die Abhängigkeit der Festigkeit von der Größe der Versuchskörper wird durch die Ungleichmäßigkeit des Baustoffs erklärt und ist eine Funktion der quadratischen Streuung der Festigkeiten. Größere Versuchskörper haben geringere Streuungen. Längere Versuchsstücke haben geringere Mittelwerte der Festigkeiten. Bei Vergrößerung der Querschnitte hängt das Verhalten vom Spannungs-Dehnungs-Gesetz ab; bei sprödem Stoff wirkt eine Vergrößerung des Querschnittes in gleicher Weise wie eine Verlängerung; bei plastischen Stoffen dagegen bleibt das Festigkeitsmittel unverändert. Die praktischen Mindestfestigkeiten sind von der Größe der Bauteile wenig abhängig.

Summary. The dependency of the strength depends upon the test specimen size is explained by the nonuniformity of the building material. It is represented by a function of the standard deviation of the strength values. The standard deviation is lower for large specimens. Longer pieces have a lower mean value of the strength. If the cross section is made larger, the behaviour depends upon the stress-strain law; for a brittle material, a larger cross section has the same effect as a greater length, whilst for plastic materials the mean value of the strength remains unchanged. Practical minimum strength values depend little hardly upon the size of structural parts.

Résumé. La loi par laquelle la résistance dépend de la grandeur des éprouvettes s'explique par l'inégalité du matériel de construction. Elle est représentée par une fonction de l'écart quadratique des valeurs de résistance. Des grandes éprouvettes ont un petit écart quadratique. Des longues pièces ont des petites valeurs moyennes de résistance. Si la section transversale s'agrandit, le comportement dépend de la loi des efforts et des allongements, de sorte que pour un matériel cassant l'agrandissement agit comme un allongement, tandis que la valeur moyenne de la résistance reste invariable pour un matériel plastique. La résistance minimum pratique ne varie que lentement avec la grandeur des pièces.

Die Tragfähigkeit eines Bauwerkes hängt von der Festigkeit seiner einzelnen Elemente ab. Die Festigkeiten der aus diesem Grunde untersuchten Probekörper schwanken auch bei großer Sorgfalt und günstigen Bedingungen der Herstellung für den gleichen Baustoff mehr oder minder stark. So sind nach Hummel die Schwankungen, wenn eine bestimmte Betonfestigkeit angestrebt wird, bei Herstellung im Laboratorium $\pm 5\%$, auf der Baustelle $\pm 25\%$. Diesen Schwankungen wird beim Entwurf durch entsprechend vorsichtige Bemessung Rechnung getragen; übrigens genügen sie allein, um die bei statischen Untersuchungen geübte und geforderte peinliche Genauigkeit ad absurdum zu führen.

Größe und Form der Probekörper sind in den meisten Ländern durch Normen vorgeschrieben. Nun ist es bekannt, daß größere Stücke aus äußerlich genau dem gleichen Baustoff häufig geringere Festigkeiten ergeben. So rechnen z. B. die deutschen Betonvorschriften 1942 mit einer Steigerung der Festigkeit von 15%, wenn statt eines Betonwürfels $20 \times 20 \times 20$ cm ein solcher von 10 cm, mit einem Abfall von 10%, wenn ein solcher von 30 cm Kantenlänge verwendet wird. Diese Abhängigkeit der Festigkeit von der Größe der Versuchsstücke wird in den meisten Darstellungen der Festigkeitseigenschaften nur registriert, aber nicht erklärt. Ebenso unbekannt

ist, ja es wird kaum die Frage erhoben, wie sich diese unbestreitbar vorhandene Erscheinung auf die Festigkeit von Baugliedern mit ihren weit größeren Abmessungen auswirkt, z. B. welche Festigkeiten zu erwarten sind, wenn statt Würfeln von 20 oder 30 cm Länge Balkenquerschnitte von 80/300 cm oder noch mehr ausgeführt werden.

Es scheint dem Verfasser an der Zeit, über diesen Agnostizismus hinauszukommen; die folgende Abhandlung ist daher ein Versuch, die Erscheinung mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung aufzuklären und weitere Schlußfolgerungen aus ihr zu ziehen. Dabei sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß der Einfluß, den eine veränderte Größe der Probekörper oder Bauglieder auf die Herstellungsbedingungen hat, hier nicht in Betracht gezogen wird; es handelt sich also stets um den äußerlich gleichen Baustoff, dessen Beschaffenheit lediglich solchen Schwankungen unterworfen ist, die im Sinne der Wahrscheinlichkeitsrechnung als zufällig anzusehen sind.

1. Hintereinander geschaltete Elemente mit gleicher Beanspruchung.

a) Unstetige Verteilung.

Gegeben seien n Proben gleicher Form und Größe und äußerlich gleicher Beschaffenheit, deren Festigkeiten, der Größe nach geordnet,

$$\sigma_1 < \sigma_2 \dots < \sigma \dots < \sigma_n \quad (1)$$

sein mögen; es kann sich z. B. um einachsrig gedrückte Betonprismen oder Zugstäbe aus Stahl oder auch um einen Balken mit auf die ganze Länge gleichem Biegemoment

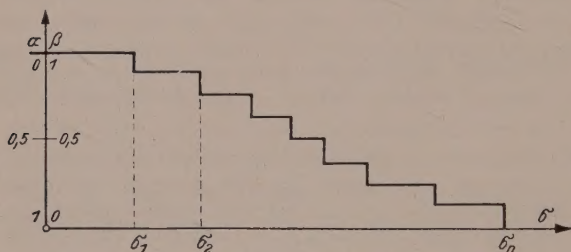


Abb. 1.

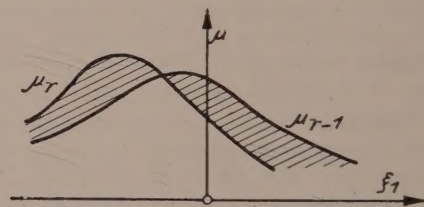


Abb. 2.

handeln. Es sei ferner a_1 die Anzahl der Elemente, deren Festigkeit kleiner ist als ein vorgeschriebener Wert σ , also $b_1 = n - a_1$ die Zahl der Stücke, die mindestens diese Festigkeit besitzen. Bezogen auf die Gesamtzahl n wird

$$\alpha_1 = a_1/n, \quad \beta_1 = b_1/n, \quad \alpha_1 + \beta_1 = 1; \quad (2)$$

die zeichnerische Darstellung ist in Abb. 1 zu sehen.

Wir betrachten nunmehr einen gezogenen oder gedrückten Stab oder einen Balken mit konstantem Biegemoment und gleichem Querschnitt wie die bisherigen Elemente, aber der r -fachen Länge. Der so gebildete Körper wird im folgenden „Bauteil“ genannt; er besteht offenbar aus r Elementen der vorher betrachteten Art. Knickgefahr sei ausgeschlossen; bei Belastung bricht dann das schwächste der r Elemente. Wir bezeichnen diese Anordnung als „Hintereinanderschaltung“ der Elemente in Richtung des Kraftflusses.

Die Anzahl der aus den n Elementen überhaupt herstellbaren Bauteile ist

$$n_r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Ist r klein gegenüber n , so kann man statt dessen setzen

$$n_r = \frac{n^r}{r!}. \quad (3)$$

Mit a_r soll, ähnlich wie vorhin, die Zahl der Bauteile bezeichnet werden, deren Festigkeit einen vorgeschriebenen Wert nicht erreicht, mit $b_r = n_r - a_r$ die Zahl derjenigen, deren Festigkeit diesem Wert mindestens gleich ist; die zugehörigen Verhältniszahlen sind

$$\alpha_r = a_r/n_r, \quad \beta_r = b_r/n_r, \quad \alpha_r + \beta_r = 1. \quad (4)$$

Die Zahl b_r ergibt sich nun durch Kombination der b Elemente, die den gestellten Mindestansprüchen genügen, zu je r , es ist also

$$b_r = \binom{b_1}{r} = \frac{b_1!}{r!(b_1 - r)!}$$

oder vereinfacht

$$\beta_r = \frac{b_1^r}{r!}. \quad (5)$$

Man erhält also mit Hilfe von (2) und (4) die einfache Beziehung

$$\beta_r = \beta_1^r, \quad \alpha_r = 1 - \beta_1^r. \quad (6)$$

Je länger demnach der Bauteil gemacht wird, um so geringer ist der brauchbare Anteil β_r , und zwar um so mehr, je höhere Ansprüche an die Festigkeit gestellt werden, je kleiner also β_1 ist. Wenn man $\beta_1 = 1 - \alpha_1$ in eine Potenzreihe entwickelt, so folgt

$$\alpha_r = r \alpha_1 - \frac{r(r-1)}{2 \cdot 1} \alpha_1^2 + \dots; \quad (7)$$

in ungünstigster Annäherung steigt also der Anteil α_r der unbrauchbaren Bauteile im gleichen Verhältnis wie die Länge.

Das Ergebnis (6) hätte man einfacher auf Grund der Wahrscheinlichkeitsrechnung wie folgt ableiten können: Damit der Bauteil die geforderte Mindestfestigkeit besitzt, ist nötig, daß dies für seine sämtlichen Elemente gleichzeitig zutrifft. Die Wahrscheinlichkeit, daß eines derselben diese Mindestfestigkeit besitzt, ist β_1 . Dann ist aber die Wahrscheinlichkeit für das gleichzeitige Auftreten dieser Eigenschaft in sämtlichen Elementen gleich dem Produkt der r Einzelwahrscheinlichkeiten, das heißt eben β_1^r .

b) Stetige Verteilung.

Die weitere mathematische Behandlung wird erleichtert, wenn man eine stetige Verteilung der Festigkeiten annimmt, also statt einer endlichen Zahl von Versuchsergebnissen σ eine an sich mögliche unendliche Anzahl in Betracht zieht. Statt Abb. 1 erhält man dann eine stetige Kurve, wie z. B. in Abb. 3 oben; derartige Kurven sind im Betonbau und der Bodenmechanik als Sieblinien gebräuchlich. Die Größen α und β behalten ihre durch (2) gegebene Bedeutung. Wir bilden nun die Ableitung

$$\mu_1 = \frac{d\alpha_1}{d\sigma} = - \frac{d\beta_1}{d\sigma}; \quad (8)$$

dann ist $n \mu_1 d\sigma = da_1$ offenbar die Anzahl der Elemente mit einer Festigkeit zwischen σ und $\sigma + d\sigma$, während $\mu_1 d\sigma$ der auf die Gesamtzahl derselben bezogene Anteil derselben ist; μ_1 selbst wird als relative Häufigkeit bezeichnet. Die Häufigkeitslinie oder Verteilungskurve $f(\mu, \sigma)$ ist im allgemeinen glockenförmig nach Art von Abb. 3 unten; das Integral

$$\int \mu_1 d\sigma = 1 \quad (9)$$

stellt die Gesamtheit aller möglichen Fälle und damit den Flächeninhalt der Häufigkeitslinie dar. Hier und im folgenden erstrecken sich die Integrale über den ganzen Bereich der Schwankung von σ .

Das arithmetische Mittel der Festigkeiten der Elemente ist nun

$$\sigma_{m1} = \frac{1}{n} \int \sigma da$$

oder nach (8)

$$\sigma_{m1} = \int \sigma \mu_1 d\sigma. \quad (10)$$

Wir bilden ferner die Abweichung ξ_1 vom arithmetischen Mittel gemäß

$$\xi_1 = \sigma - \sigma_{m1}, \quad d\xi_1 = d\sigma; \quad (11)$$

man sieht sofort, daß

$$\int \mu_1 \xi_1 d\xi_1 = 0 \quad (12)$$

ist; die Ordinate durch σ_{m1} kann als Schwerlinie der Häufigkeitsfläche bezeichnet werden. Bilden wir ferner

$$\tau_1^2 = \int \mu_1 \xi_1^2 d\xi_1, \quad (13)$$

so erhalten wir die quadratische Streuung der Elementarfestigkeiten, die als Trägheitsradius der Häufigkeitsfläche gedeutet werden kann. Die häufigst vorkommende Abweichung ist diejenige, für die

$$\frac{d\mu_1}{d\xi_1} = 0 \quad (14)$$

wird; bei symmetrischer Verteilung ist sie Null.

Für die spätere Untersuchung auf Grund einer Normalverteilung ist es zweckmäßig, die folgenden dimensionslosen Werte einzuführen:

$$\xi_{01} = \xi_1 : \tau_1, \quad \mu_{01} = \mu_1 \tau_1, \quad (15)$$

also die quadratische Streuung als Maßeinheit zu verwenden. Aus den vorigen Gleichungen erhält man dann

$$\mu_{01} = \frac{d\alpha_1}{d\xi_{01}} = - \frac{d\beta_1}{d\xi_{01}}, \quad (8a)$$

$$\int \mu_{01} d\xi_{01} = 1, \quad (9a)$$

$$\int \mu_{01} \xi_{01} d\xi_{01} = 0. \quad (12a)$$

Bei auf die „Bauteile“ bezogenen Größen ersetzen wir den bisherigen Index 1 durch r ; da $d\xi_r = d\xi_1$ ist, schreiben wir statt dessen $d\xi$ und erhalten insbesondere:

$$\mu_r = - \frac{d\beta_r}{d\xi}, \quad (8b)$$

$$\int \mu_r d\xi = 1, \quad (9b)$$

$$\sigma_{mr} = \int \sigma \mu_r d\xi, \quad (10b)$$

$$\xi_r = \sigma - \sigma_{mr}, \quad (11b)$$

$$\int \mu_r \xi_r d\xi = 0, \quad (12b)$$

$$\tau_r^2 = \int \mu_r \xi_r^2 d\xi. \quad (13b)$$

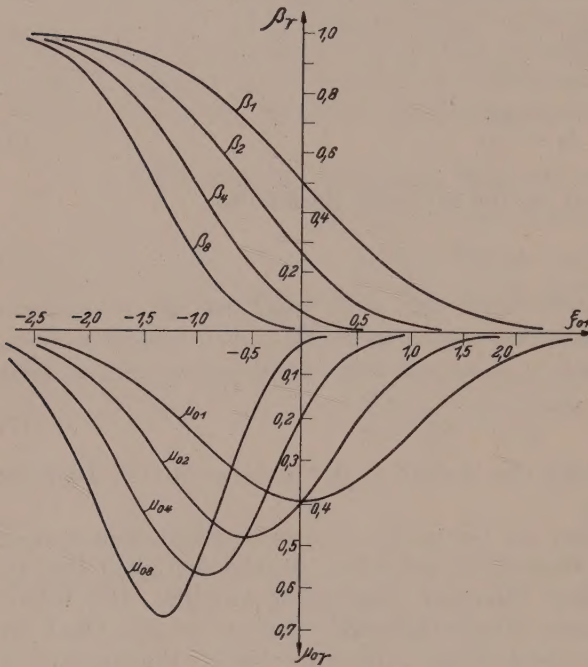


Abb. 3.

Auch hier bilden wir dimensionslose Größen durch Einführung der Streuung τ_1 der Elemente als Maßeinheit gemäß

$$\xi_{0r} = \xi_r : \tau_1, \quad d\xi_{0r} = d\xi_0, \quad \tau_{0r} = \tau_r : \tau_1, \quad \mu_{0r} = \mu_r \cdot \tau_1, \quad (16)$$

so daß wir erhalten:

$$\mu_{0r} = - \frac{d\beta_r}{d\xi_0}, \quad (8c)$$

$$\int \mu_{0r} d\xi_0 = 1, \quad (9c)$$

$$\int \mu_{0r} \xi_{0r} d\xi_0 = 0, \quad (12c)$$

$$\tau_{0r}^2 = \int \mu_{0r} \xi_{0r}^2 d\xi_0. \quad (13c)$$

Auf Grund von (6), (8), (8b) erhalten wir nun

$$\mu_r = r \mu_1 \beta^{r-1}; \quad (17)$$

den Mittelwert σ_{mr} setzen wir

$$\sigma_{mr} = \sigma_{m1} - \varepsilon_r; \quad (18)$$

die Abweichung ist dann

$$\xi_r = \xi_1 + \varepsilon_r. \quad (19)$$

Damit folgt aus (12b):

$$\mu_r (\xi_1 + \varepsilon_r) d\xi = 0$$

und zufolge (9b):

$$\varepsilon_r = - \int \mu_r \xi_1 d\xi = \int \xi_1 d\beta_r. \quad (20)$$

Für die Streuung gilt nach (13b):

$$\tau_r^2 = \int (\xi_1 + \varepsilon_r)^2 \mu_r d\xi;$$

dies führt nach kurzer Rechnung auf

$$\tau_r^2 = \int \mu_r \xi_1^2 d\xi - \varepsilon_r^2. \quad (21)$$

Gl. (17) läßt sich auch schreiben:

$$\frac{\mu_r}{\mu_{r-1}} = \frac{r}{r-1} \beta_1. \quad (17a)$$

Ist also $\beta_1 > 1 - 1/r$, so wird $\mu_r > \mu_{r-1}$ und umgekehrt. Mit wachsendem r verschieben sich somit die Häufigkeiten ins Gebiet größerer β_1 , das heißt geringerer Festigkeiten, s. Abb. 2. Man ersieht ferner aus dieser Abbildung, daß die Schwerpunkte der Häufigkeitsflächen sich immer weiter nach links verschieben, daß also allgemein

$$\varepsilon_r > \varepsilon_{r-1} \quad (22)$$

ist.

c) Normalverteilung.

In der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist die folgende, auf Gauß zurückgehende, sog. Normalverteilung üblich

$$\mu_1 = \frac{1}{\tau_1 \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\xi_1^2}{2\tau_1^2}\right); \quad (23)$$

hierin wurde $\exp y$ statt e^y geschrieben. Die Verteilung ist symmetrisch und erstreckt sich über den ganzen Bereich von $-\infty \leq \xi_1 \leq +\infty$; die weitere Berechnung wird übersichtlicher, wenn man die früher definierten dimensionslosen Größen in (23) einführt; es wird dann

$$\mu_{01} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\xi_{01}^2}{2}\right), \quad (23a)$$

das heißt es gibt, abgesehen von dem durch τ_1 ausgedrückten Einfluß nur eine einzige Verteilung; sie ist in Abb. 3 unten dargestellt. Man kann natürlich gegen die Verwendung dieser Verteilung für Festigkeitsprobleme verschiedenes einwenden, unter anderem, daß negative Festigkeiten widersinnig sind und deshalb der Bereich ξ_1 nicht bis $-\infty$ reichen kann. Andererseits aber haben, wie sich nachrechnen läßt, in dieser Verteilung 99,7% aller Werte Abweichungen ξ_1 vom Mittel, die geringer sind als die dreifache Streuung. Da überdies für die Funktion (23a) überall Tabellen zur Verfügung stehen, werden im folgenden die in Abschnitt b gewonnenen Ergebnisse für eine Normalverteilung ausgewertet. Wir beschränken uns dabei auf die Werte $r = 1, 2, 4$ und 8; die Zahlenrechnung bietet nichts Besonderes und wird übergangen.

Abb. 3 zeigt oben die Werte β_r und unten die bezogenen Häufigkeiten μ_{0r} ; man sieht deutlich das schon in Abb. 2 angedeutete Herüberwandern der größten Häufigkeit in das Gebiet geringerer Festigkeit. Man erkennt ferner, wie mit wachsendem r

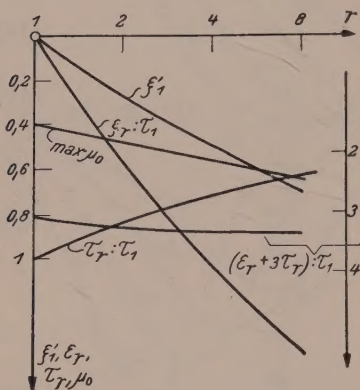


Abb. 4.

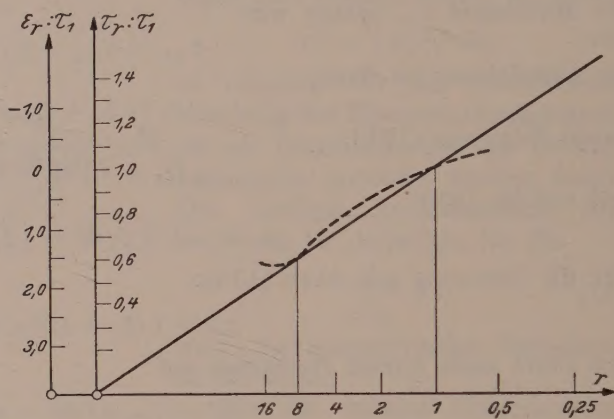


Abb. 5.

die Häufigkeit sich stärker um den Mittelwert zusammendrängt, so daß eine Abnahme der Streuung τ_r zu erwarten ist. Interessant ist ferner, daß, abgesehen von $r = 1$, die Verteilungen keine genauen Normalverteilungen sind.

In Abb. 4 sind die Größtwerte $\max \mu_0$ der Häufigkeiten und die Stellen ξ'_r , wo sie auftreten, als Funktion von r aufgetragen, ferner sind die nach (20) und (21) errechneten Größen $\epsilon_r : \tau_1$ und $\tau_r : \tau_1$ eingetragen.

Im Sinne der oben gemachten Bemerkungen betrachten wir nun als praktisch zu erwartenden Mindestwert der Festigkeit jenen, der um das dreifache der Streuung τ_r vom Mittelwert σ_{mr} abweicht, vom Mittel σ_{m1} der Elemente also die Abweichung $\epsilon_r + 3 \tau_r$ nach unten hat; die Größen $\epsilon_{0r} + 3 \tau_{0r} = (\epsilon_r + 3 \tau_r) : \tau_1$ sind ebenfalls in Abb. 4 vermerkt. Nun nimmt zwar die mittlere Festigkeit σ_{mr} der Bauteile entsprechend den Größen ϵ_r ständig ab, dafür aber werden die quadratischen Streuungen τ_r immer geringer und die oben definierten Mindestfestigkeiten ändern sich nur wenig. Die am Bauteil zu erwartende Mindestfestigkeit unterscheidet sich also nicht sehr von der am einzelnen, durch Versuch geprüften Element, vorausgesetzt allerdings, daß es sich um eine Normalverteilung handelt.

Die Ergebnisse der Abb. 4 werden durch folgende Formeln mit guter Annäherung wiedergegeben:

$$\tau_r : \tau_1 = 0.85^{2 \log r} \quad (24)$$

oder identisch hiermit

$$\tau_r : \tau_1 = r^{-0.235} \quad (24a)$$

und

$$\epsilon_r : \tau_1 = 3.80 (1 - \tau_r : \tau_1). \quad (25)$$

Statt (24a) kann noch geschrieben werden:

$$\varepsilon_r : \tau_1 = \frac{1}{\sqrt[r]{r}}, \quad (24b)$$

was allerdings um einige Prozent zu geringe, also zu günstige Werte ergibt. Mit (25) zusammen folgt dann

$$\varepsilon_r : \tau_1 = 3.80 \left(1 - \frac{1}{\sqrt[r]{r}} \right). \quad (25a)$$

Trägt man in Abb. 5 die reziproke vierte Wurzel als Abszisse auf, so werden (24b) und (25a) als gerade Linien dargestellt; die gestrichelte Kurve wird später besprochen.

2. Hintereinander geschaltete Elemente mit ungleichmäßiger Beanspruchung.

Es sei ein Balken von gleichmäßigem Querschnitt gegeben, der aus r Elementen $1 \dots k \dots r$ besteht und dessen Biegemomente von 1 gegen r hin ansteigen, so daß also $M_k > M_{k-1}$ ist, s. Abb. 6, wo der Sonderfall einer geradlinigen Zunahme von M dargestellt ist. Wenn der Balken aus völlig gleichartigem Baustoff bestünde, würde er selbstverständlich an der Einspannstelle brechen und so ergibt es auch jede statische Berechnung. Die Erfahrung lehrt aber, daß er dies nicht immer tut, nämlich dann nicht, wenn an irgendeiner Stelle das Verhältnis „Festigkeit : Biegespannung“ geringer ist als an der Einspannstelle; maßgebend für den Bruch ist also nicht die Spannung, sondern die Ausnutzung.

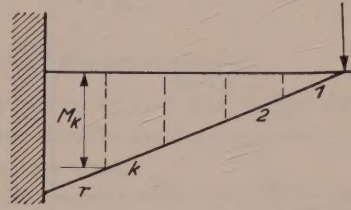


Abb. 6.

Fordern wir nun für das Element $k = r$ eine Mindestfestigkeit σ , so genügt offenbar für die übrigen Elemente eine Festigkeit

$$\sigma_k \geq \frac{k}{r} \sigma, \quad (26)$$

wenn dadurch die Gefahr eines Bruches für den Balken als ganzes nicht verändert werden soll. Wir bezeichnen nun wieder, wie im vorigen Abschnitt, mit β_1 die Wahrscheinlichkeit, daß ein Element die Mindestfestigkeit σ besitzt, ferner mit $\beta_{(k)}$ die Wahrscheinlichkeit, daß die Ungleichung (26) erfüllt ist. Die Wahrscheinlichkeit, daß (26) für alle Elemente 1 bis r gleichzeitig erfüllt ist, sei mit β_r' bezeichnet; nach den Gesetzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist sie gleich dem Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten $\beta_{(k)}$, also

$$\beta_r' = \beta_{(1)} \cdot \beta_{(2)} \cdot \dots \cdot \beta_{(k)} \cdot \dots \cdot \beta_{(r-1)} \cdot \beta_1. \quad (27)$$

Führt man nun Gl. (6) in (26) ein, so folgt

$$\sigma_k \geq \sigma_{m1} + \frac{k}{r} \xi_1 - \left(1 - \frac{k}{r} \right) \sigma_{m1};$$

die Abweichung der nach (26) geforderten Mindestfestigkeiten gegenüber dem Mittel σ_{m1} ist also

$$\xi_k = \frac{k}{r} \xi_1 - \left(1 - \frac{k}{r} \right) \sigma_{m1}, \quad (28)$$

oder wenn wir durch die quadratische Streuung τ_1 der Einzelfestigkeiten dividieren,

$$\xi_{0k} = \frac{k}{r} \xi_{01} - \left(1 - \frac{k}{r} \right) \frac{\sigma_{m1}}{\tau_1}. \quad (28a)$$

Kennt man nun die Wahrscheinlichkeit β_1 für ein beliebiges ξ_{01} , z. B. auf Grund einer Normalverteilung, so kann man mit Hilfe von (28a) auch die Wahrscheinlichkeit $\beta_{(k)}$ für die in einem beliebigen Element k geforderte geringere Festigkeit ermitteln

und schließlich die Wahrscheinlichkeit β_r' für die geforderte Festigkeit des Balkens nach (27) errechnen. Durch sinngemäße Anwendung der früher angegebenen Beziehungen erhält man dann noch die relativen Häufigkeiten

$$\mu_r' = - \frac{d\beta_r'}{d\xi_1} \quad (29)$$

oder dimensionslos

$$\mu_{0r}' = - \frac{d\beta_r'}{d\xi_0}, \quad \mu_{0r}' = \tau_1 \mu_r'. \quad (29a)$$

Hat man es nur mit einem einzigen Element zu tun, so geht (27) über in $\beta_r' = \beta_1$. Da ferner $\sigma_k < \sigma$, ist $\beta_{(k)} > \beta_1$ und deshalb $\beta_r' > \beta_r$, wie man leicht durch Vergleich von (27) und (6) erkennt. Die Wahrscheinlichkeit, daß eine bestimmte Gesamtfestigkeit erreicht wird, ist also hier größer als bei einem Bauteil mit überall gleicher Spannung, wie er im vorigen Abschnitt behandelt wurde. Entgegen den üblichen Vorstellungen hat also ein Träger mit konstantem Querschnitt eine größere Sicherheit als der sog. Träger gleichen Widerstandes.

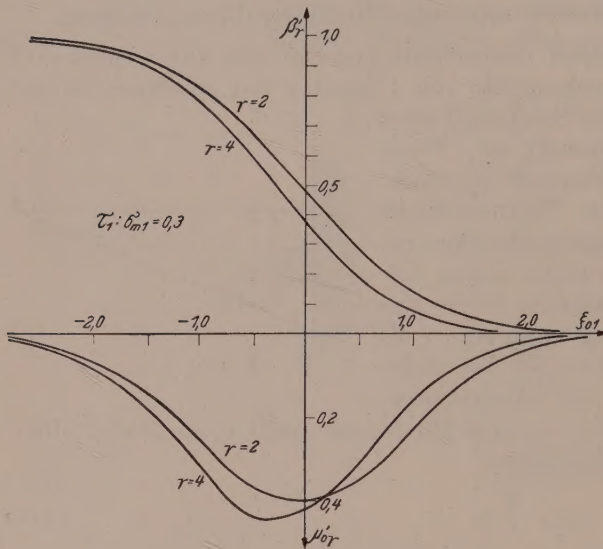


Abb. 7.

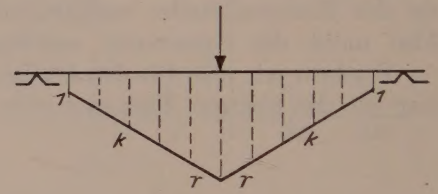


Abb. 8.

Um die im Zusammenhang mit den Gl. (27) bis (29a) angegebenen Operationen zahlenmäßig durchführen zu können, müssen wir für $\tau_1: \sigma_{m1}$ einen bestimmten Wert annehmen; dies war bei der Ermittlung von β_r nicht nötig. Wir setzen

$$\tau_1: \sigma_{m1} = 0.3, \quad (30)$$

rechnen also mit einer selbst für Beton recht starken Streuung. Die Ergebnisse sind in Abb. 7 für $r = 2$ und $r = 4$ dargestellt. Man erkennt wieder das Vorrücken der Häufigkeiten in das Gebiet geringerer Festigkeiten. Doch ist diese Erscheinung hier viel weniger ausgeprägt als in Abb. 3, weil dort der Bauteil auf seine ganze Länge die gleiche Spannung hatte; mit einem kleineren Wert $\tau_1: \sigma_{m1}$ würde sich die Verteilung in Abb. 7 noch mehr den Verteilungen β_1 und μ_{01} nähern.

Man kann durch sinngemäße Übertragung der Gl. (20) und (21) die Verschiebungen ε_r' des Mittels und die quadratische Streuung τ_r' rechnen. Man erhält, immer wieder mit der Annahme (30) für

$r = 1$	2	4	
$\varepsilon_r': \tau_1 = 0$	0.07	0.31	}
$\tau_r': \tau_1 = 1$	0.998	0.94	
$(\varepsilon_r' + 3 \tau_r'): \tau_1 = 3$	3.01	3.14	

(31)

Gl. (27) bleibt auch dann noch gültig, wenn statt des einfachen Belastungsfalles der Abb. 6 ein anderer zugrunde gelegt wird; doch ist statt der Gl. (26) und (28) dann eine andere Beziehung zu verwenden und die Rechnung wird im allgemeinen umständlicher. Ein wichtiger Fall sei noch hervorgehoben, die Belastung eines Balkens mit einer Einzellast in Feldmitte nach Abb. 8. Da hier Elemente gleicher Spannung rechts und links der Mitte vorkommen, erhält man Gl. (27) in der abgewandelten Form

$$\beta_r' = \beta_{(1)}^2 \cdot \beta_{(2)}^2 \cdot \dots \cdot \beta_{(k)}^2 \cdot \dots \cdot \beta_{(r-1)}^2 \cdot \beta_1^2, \quad (32)$$

wobei (26) und (28) ihre Gültigkeit behalten. Bei der Auswertung legen wir wiederum die ungünstige Annahme (30) zugrunde und erhalten für

$r =$	1	2	4	
	$\varepsilon_r' : \tau_1 = 0.55$	0.63	0.84	} (33)
	$\tau_r' : \tau_1 = 0.84$	0.83	0.81	
	$(\varepsilon_r' + 3 \tau_r') : \tau_1 = 3.07$	3.12	3.27	

3. Nebeneinander geschaltete Elemente mit gleicher Beanspruchung.

Wir denken uns nun ein einachsig gedrücktes Prisma nach Abb. 9 aus mehreren nebeneinander gestellten prismatischen Elementen gleicher Größe zusammengesetzt; die gleiche Wirkung entsteht, wenn ein Balken unter Biegung nach Abb. 10 aus mehreren schmäleren Einzelbalken, seinen Elementen, zusammengesetzt gedacht werden kann. In diesem Falle hängt die Lösung vom Spannungs-Dehnungs-Gesetz des Baustoffes ab.

Im ungünstigsten Falle, den wir als ideal-sprödes Verhalten bezeichnen wollen, verliert der Baustoff nach Erreichen einer Höchstspannung überhaupt sein Gefüge, das heißt die von ihm übertragene Spannung fällt bei Überschreitung einer gewissen Verformung auf Null zurück, s. Abb. 11a. Unter einer gleichmäßigen Beanspruchung verstehen wir nun, daß in Abb. 9 alle Elemente die gleiche Verkürzung λ und in Abb. 10 die gleiche gegenseitige Verdrehung ihrer Querschnitte erfahren. Verhält sich der Baustoff gemäß Abb. 11a, so fällt bei Erreichen einer gewissen Dehnung das schwächste Element aus und überträgt keine Kraft mehr. Sieht man mit der Zerstörung eines seiner Elemente den ganzen Bauteil als unbrauchbar an, so gelten demnach bei ideal-sprödem Verhalten die gleichen Häufigkeitsgesetze wie in Abschnitt 1.

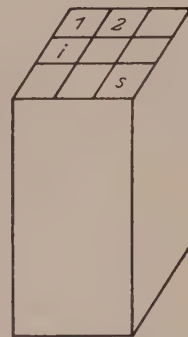


Abb. 9.

Allerdings braucht man den Ausfall eines Elements noch nicht mit dem Bruch des ganzen Bauteiles gleichzusetzen; es ist vielmehr möglich, daß die restlichen Elemente noch eine Laststeigerung zulassen. Um dies näher zu betrachten, numerieren wir die Elemente, deren Anzahl diesmal gleich s sein möge, in der Reihenfolge steigender Festigkeiten: $\sigma_1 < \sigma_2 \dots < \sigma_i < \sigma_{i+1} \dots$. Die unmittelbar vor dem Versagen des ersten Elements übertragene Last ist dann $s \sigma_1$; fällt dieses aus, so wird $(s - 1) \sigma_2$ aufgenommen und vor dem Ausfall des Elements i ist die übertragene Last gleich

$$P = (s - i - 1) \sigma_i. \quad (34)$$

Sind alle σ gleich, so ist natürlich die aufnehmbare Last $s \sigma$; im allgemeinen Falle aber ist sie gleich dem aus (34) zu bestimmenden Maximum von P in bezug auf i .

Um die Untersuchung im einzelnen durchführen zu können, benötigt man den Verlauf von σ_i als Funktion von i . Doch können wir auch ohne diese genauere Unter-

suchung den Schluß ziehen, daß selbst für ideal-spröde Stoffe die Gesetze des 1. Abschnittes im allgemeinen zu ungünstig sind.

Eine weitere günstige Erscheinung besteht darin, daß bei vielen Baustoffen der Elastizitätsmodul mit der Festigkeit steigt. Bei gleichmäßiger Verformung des zusammengesetzten Bauteiles erhalten dann die weniger festen Elemente geringere Spannungen und werden zugunsten der stärkeren entlastet. Ist im günstigsten Falle so werden beim Bruch alle Elemente mit λE_i , das heißt mit ihrer Festigkeit σ_i beansprucht.

$$\sigma_i = \lambda \cdot E_i, \quad (35)$$

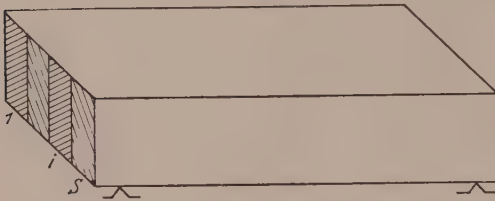


Abb. 10.

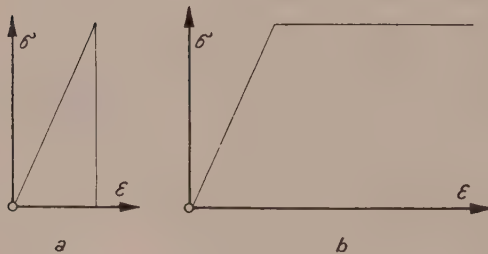


Abb. 11.

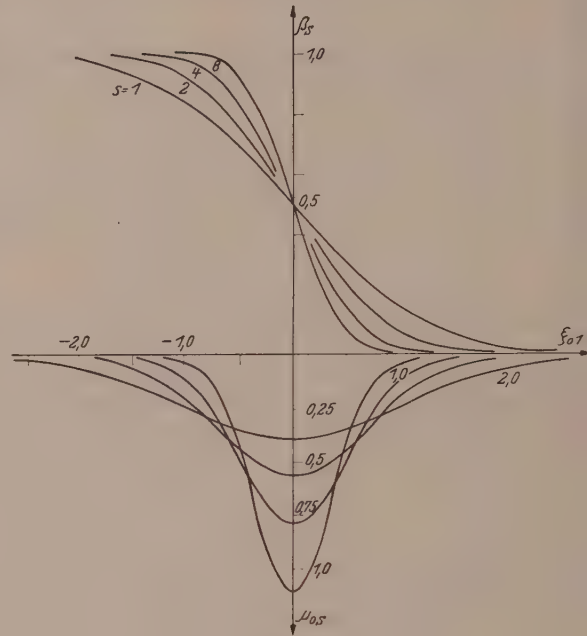


Abb. 12.

Dasselbe ist aber der Fall, wenn der Baustoff sich nach Abb. 11 b ideal-plastisch verhält; dieses Spannungs-Dehnungs-Gesetz kann als Idealisierung für Stahl und nach neueren Untersuchungen mit freilich geringerer Annäherung auch für Beton angesehen werden. Erreicht hier ein Element seine Festigkeit, so fällt es bei weiterer Laststeigerung des ganzen Bauteiles nicht aus, sondern überträgt unter wachsender Verformung nach wie vor die gleiche Spannung, bis weitere und schließlich sämtliche Elemente ihre Festigkeit erreicht haben. Die Festigkeit s des Bauteiles ist dann gleich dem arithmetischen Mittel der bei seinem Aufbau beteiligten Einzelfestigkeiten, das heißt es ist

$$\sigma_s = \frac{1}{s} \sum_1^s \sigma_i; \quad (36)$$

sie hängt also einerseits ab vom Verteilungsgesetz der Elementarfestigkeiten und andererseits vom zufälligen Vorkommen dieser Festigkeiten in dem betreffenden Bauteil. Ein in mathematischer Hinsicht identisches Problem ist aber in der Wahrscheinlichkeitstheorie bereits gelöst: Entnimmt man aus einem großen „Kollektiv“ zwecks Untersuchung eine beschränkte Anzahl von s Proben, so ist das Mittel der Festigkeiten dieser Proben offenbar durch (36) gegeben. In der Theorie der Probenahme wird dann bewiesen, daß die Werte σ_s bei wiederholter Probenahme um einen Mittelwert σ_{ms} schwanken, der gleich demjenigen, σ_{m1} , des Kollektivs selbst ist, das heißt es ist

$$\underline{\sigma_{ms} = \sigma_{m1}}; \quad (37)$$

ferner beträgt die quadratische Streuung τ_s der Werte σ_s

$$\tau_s = \frac{\tau_1}{\sqrt{s}}, \quad (38)$$

wobei τ_1 die Streuung des Kollektivs selbst, hier also der Elemente, bedeutet.

Folgen die Festigkeiten einer Normalverteilung, so tun dies auch diejenigen der zusammengesetzten Bauteile und man erhält β_s und $\mu_s = \mu_{0s} \tau_1$ aus den Kurven der Abb. 12.

4. Nebeneinander geschaltete Elemente mit ungleicher Beanspruchung.

Legt man, wie in Abb. 13, in einem Balken mehrere Elemente übereinander, so hängt, ähnlich wie im Fall der gleichmäßigen Beanspruchung nach Abb. 8, 9 und 10, das Verhalten vom Verformungsgesetz ab. Wir setzen zunächst voraus, daß das Hookesche Gesetz gültig sei, s. Abb. 10a und daß der Elastizitätsmodul für alle Elemente der gleiche sein soll. Wir beschränken uns dabei auf den Fall der reinen Biegung; es gilt dann das Diagramm der Abb. 13. Die Aufgabe ist damit genau die gleiche wie in Abb. 8 und wir können die Ergebnisse (32) und (33) unverändert übernehmen, wobei lediglich die Bezeichnung s statt r zu verwenden ist.

Gilt dagegen Gl. (35) oder ist der Baustoff idealplastisch gemäß Abb. 11b, so werden wieder die sämtlichen Elemente des Balkens mit ihrer Festigkeit voll ausgenutzt. Es gilt dann die Beweisführung am Ende des vorigen Abschnittes, das heißt bei Vergrößerung der Balkenhöhe auf das s -fache ist mit Gl. (36) bis (38) zu rechnen.

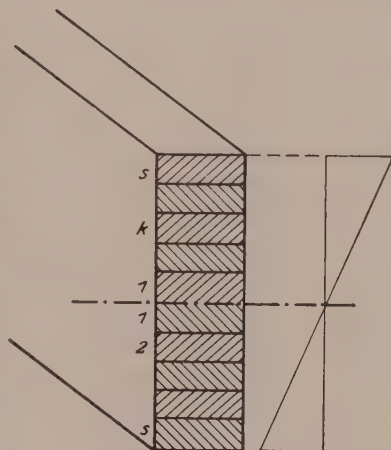


Abb. 13.

5. Gleichzeitige Neben- und Hintereinanderschaltung.

Durch Kombination der Ergebnisse der vorigen vier Abschnitte kann das Verhalten mehrfach zusammengesetzter Bauteile beurteilt werden. Es sei z. B. an Prismen $10 \cdot 10 \cdot 40$ cm bei einachsiger Beanspruchung in der Längsrichtung eine Festigkeit ermittelt worden, deren Mittelwert $\sigma_{m1} = 100$ kg/cm² mit einer quadratischen Streuung von $\tau_1 = 10$ kg/cm² sei. Es sollen die entsprechenden Werte für ein Prisma $20 \cdot 20 \cdot 120$ cm angegeben werden. Es ist dann $r = 120 : 40 = 3$ und $s = 20^2 : 10^2 = 4$.

Wir betrachten zunächst die durch Hintereinanderschalten entstehenden Elemente von 120 cm Länge und $10 \cdot 10$ cm Querschnitt. Für diese erhält man nach (24b) $\tau_s = 10 : \sqrt[4]{3} = 7.6$ kg/cm² und nach (25) einen Festigkeitsabfall von $\varepsilon_3 = 3.80 \cdot 10 (1 - 0.76) = 9.1$, also eine mittlere Festigkeit von $100 - 9.1 = 90.9$ kg/cm². Diese Elemente, zu je vier nebeneinandergeschaltet und als idealplastisch angesehen, haben nach (37) die gleiche mittlere Festigkeit, während die Streuung nach (38) nur mehr $\tau_4 = 7.6 : \sqrt[4]{4} = 3.8$ kg/cm² beträgt. Als Mindestfestigkeit kann praktisch angesehen werden bei den Elementen $100 - 3 \cdot 10.0 = 70$, bei den Bauteilen dagegen $90.9 - 3 \cdot 3.8 = 79.5$ kg/cm².

Ein anderes Beispiel: An einem Balken aus homogenem idealplastischem Baustoff sei bei Belastung nach Abb. 14 eine Biegefestigkeit von im Mittel $\sigma_{m1} = 200$ kg/cm² mit einer Streuung von 10 kg/cm² beobachtet worden, wenn seine Breite $b = 10$,

seine Höhe $h = 15$ und der Lastabstand $a = 50$ cm beträgt. Welche Festigkeit ist zu erwarten, wenn $b = 30$, $h = 80$ und $a = 180$ cm gemacht wird? Ein Bruch in den Endstrecken sei durch Überbemessung ausgeschlossen.

Wir betrachten zunächst Elemente mit $b = 10$, $h = 15$, $a = 180$, also $r = 180 : 50 = 3.6$; die Gl. (24b) und (25) liefern hierzu $\tau_{3.6} = 10.0 : \sqrt[4]{3.6} = 7.25$, $\varepsilon_{3.6} = 3.8 \cdot 10 (1 - 0.725) = 10.5$, also eine mittlere Festigkeit von 189.5 kg/cm^2 . Die Verbreiterung von 10 auf 30 cm, also mit $s = 30 : 10 = 3$, läßt die mittlere Festigkeit unverändert, setzt aber die Streuung auf $\tau_3 = 7.25 : \sqrt{3} = 4.18 \text{ kg/cm}^2$ herab. Durch die Vergrößerung der Höhe von 15 auf 80 cm, also mit $s = 80 : 15 = 5.33$ bleibt wiederum die mittlere Festigkeit unverändert, während die Streuung nochmals herabgesetzt wird, und zwar auf $\tau_{5.33} = 4.18 : \sqrt{5.33} = 1.81 \text{ kg/cm}^2$. Die praktische Mindestfestigkeit ist für die Elemente $200 - 3 \cdot 10 = 170$ und für die Bauteile $189.5 - 3 \cdot 1.81 = 184.0 \text{ kg/cm}^2$; auch hier wird also der Abfall der mittleren Festigkeit durch eine gleichmäßigere Beschaffenheit des Bauteiles mehr als ausgeglichen.

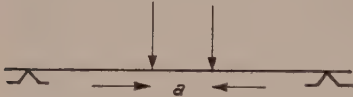


Abb. 14.

6. Versuche.

Systematische Versuche über die Abhängigkeit der Festigkeiten von der Größe der Versuchsstücke sind nur selten durchgeführt worden. Insbesondere sind solche, bei denen außer den Festigkeitsmitteln auch die quadratische Streuung ermittelt wurde, nicht bekannt. Immerhin ist ein vorläufiges Urteil auf Grund einiger Angaben im Schrifttum möglich. Aus mehreren hierfür geeigneten Versuchsreihen seien die Angaben in Davis-Troxell-Wiskocil, Testing and inspection of materials, für Betonzylinder mit einem Verhältnis $h : d = 2$ herausgegriffen; für die in Zeile 1 der folgenden Tabelle angegebenen Maße werden die prozentualen Festigkeiten der Zeile 2 angegeben. Es ist an sich gleichgültig, welchen der Zylinder man dabei als Element ansieht; wir wählen dafür die Größe $3/6$ in., so daß man für r die Werte der Zeile 3 und für ε_{rs} jene in Zeile 4 erhält.

Da über τ_1 keine Angaben vorliegen, nehmen wir an, daß einer der Werte mit unseren Formeln übereinstimmt; als solchen wählen wir denjenigen für $r = 8$ mit $\varepsilon_{rs} = 22$. Wenn wir ideal-plastisches Verhalten annehmen, so werden zufolge Formel (37) die Mittelfestigkeiten durch die Verbreiterung nicht beeinflusst und der Festigkeitsabfall wird durch Gl. (25a) allein ausgedrückt; es ist also $\varepsilon_{rs} = \varepsilon_r$. Mit den in Frage kommenden Werten erhält man dann $22 : \tau_1 = 3.80 (1 - \sqrt[4]{1/8})$, also $\tau_1 = 14.3$. Setzt man diesen Wert nun in (25a) ein, so erhält man für die übrigen Verhältnisse r die in Zeile 5 eingetragenen theoretischen Werte ε_{rs}' . Errechnet man hieraus die Verhältnisse $\varepsilon_{rs}' : \tau_1$, so liegen diese Größen natürlich auf der geraden Linie in Abb. 5. Die nach der angegebenen Quelle errechneten Größen $\varepsilon_{rs} : \tau_1$ dagegen folgen der gestrichelten Linie der gleichen Abbildung. Die Übereinstimmung ist gut, wobei allerdings nicht vergessen werden darf, daß wir diese Übereinstimmung für $r = 1$ und $r = 8$ hier zur grundlegenden Voraussetzung unserer Auswertung gemacht haben.

(1)	$d/h =$	2/4	3/6	6/12	8/16	12/24	18/36	24/48	36/72 in.
(2)	$\sigma_m =$	108	106	100	96	92	86	84	82%
(3)	$r =$	2/3	1	2	8/3	4	6	8	12
(4)	$\varepsilon_{rs} =$	- 2	0	6	10	14	20	22	24%
(5)	$\varepsilon_{rs}' =$	- 6.0	0	8.6	11.7	15.9	19.7	22	25.1%

Nachwort: Das Konzept zu vorstehender Arbeit wurde im wesentlichen 1949 in Belgrad niedergeschrieben. Erst nachher erhielt ich Kenntnis von der Abhandlung von W. Weibull, A statistical theory of the strength of materials, Proc. Roy. Swedish Inst. Engg. Res., Stockholm 1939. Der Grundgedanke, insbesondere Glg. (6), ist hier bereits enthalten. Die Priorität hierfür gebührt also Herrn Weibull.

(Eingegangen am 24. Februar 1951.)

Die innere Reibung und die elastischen Eigenschaften fester, flüssiger und gasförmiger Körper II.

Von E. Skudrzyk, Wien.

(Mitteilung aus dem Institut für Schwachstromtechnik der Technischen Hochschule in Wien.)

Mit 22 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Unter dem Begriff innere Reibung fassen wir alle Erscheinungen zusammen, die zu einer irreversiblen Umwandlung mechanischer Energie in Wärme führen; diese innere Reibung wird durch einfache Relaxationsvorgänge, thermische Effekte, verwickelte elastische Nachwirkungserscheinungen, mechanische Hysterese und plastisches Fließen ausgelöst. Die Meßergebnisse ermöglichen eine genaue Erfassung der einzelnen Komponenten der inneren Reibung und geben einen Einblick in das mechanische Verhalten und die Struktur der Stoffe.

Summary. Under the conception of internal friction we usually comprise all those phenomena, which lead to an irreversible generation of heat from mechanical energy. Internal friction is thus caused by simple relaxation phenomena, thermic effects, complicated elastic lags, mechanical hysteresis and plastic flow. The various components of internal friction as determined by simple vibration measurements give a fair insight onto the mechanical properties and the physical structure of the material.

Résumé. Sous la conception de Friction Interne nous comprenons habituellement tous les phénomènes produisant une transformation irréversible de l'énergie mécanique en chaleur. Cette friction interne est provoquée par des simples phénomènes de relaxation, par des effets thermiques, des résidus élastiques complexes, par l'hystérèse mécanique et par fusion plastique. Les résultats des mesures permettent la détermination exacte des composantes partielles de la friction interne et donnent une idée des propriétés mécaniques et de la structure de la matière respective.

In einer früheren Arbeit über die innere Reibung von Gasen und Flüssigkeiten¹ wurde der Nachweis erbracht, daß im Gegensatz zur klassischen Stokesschen Theorie jeder Körper nicht nur zwei Elastizitäts-, sondern auch zwei Reibungskonstanten (z. B. eine Zähigkeits- oder Schubreibung und eine Dilatationsreibung) aufweist.

Eine weitere Arbeit² beschäftigte sich mit dem elastischen Verhalten beliebiger Stoffe und den Beziehungen zwischen den verschiedenen Elastizitäts- und Reibungskonstanten. Eine Abhandlung über die Anwendung des Ultraschalles bei der Materialprüfung³ führte schließlich verschiedene Möglichkeiten einer genauen Bestimmung der Elastizitäts- und Reibungskonstanten vor Augen. Im folgenden soll nunmehr auch den bei der Deformation fester Körper auftretenden, nicht elastischen Verlusten Rechnung getragen und der Zusammenhang der Elastizitäts- und Reibungskonstanten mit der inneren Struktur herausgestellt, bzw. durch Beispiele erläutert werden.

¹ Theorie der inneren Reibung in Gasen und Flüssigkeiten und die Schallabsorption. Acta Physica Austriaca 2, 148 (1948).

² Die innere Reibung und die Materialverluste fester Körper I. Österr. Ingenieur-Arch. 3, 356 (1949).

³ Die Anwendung des Ultraschalles bei der Materialprüfung. Österr. Ingenieur-Arch. 4, 408 (1950).

A. Theorie der vollkommen elastischen Stoffe.

§ 1. Allgemeine Grundlagen.

a) Das ideal elastische Kontinuum.

Als elastisch gilt ein Stoff, der nach Abnehmen der Spannungen schließlich wieder in seinen ursprünglichen Zustand zurückkehrt. Um das mechanische Verhalten eines solchen Stoffes zu untersuchen, geht man von der Erfahrungstatsache aus, daß die elastischen Spannungen weder durch Translationen, noch durch Rotationen des Körpers als Ganzes beeinflußt werden; man spaltet demnach den reinen Translations- und Rotationsanteil von der Verschiebung der Umgebung eines Punktes ab und faßt den Spannungszustand als Funktion des restlichen Anteils der Bewegung, der Deformationen auf. Im einfachsten Fall hängen die Spannungen nur von den Deformationen, nicht aber von ihren räumlichen und zeitlichen Differentialen oder Integralen, bzw. der sonstigen Vorgeschichte der Bewegung ab und können daher bei Beschränkung auf den Gültigkeitsbereich des Hookeschen Gesetzes als lineare Taylor-Reihe der Deformationen dargestellt werden. Da bei isotropen Stoffen der Spannungszustand nicht vom Koordinatensystem abhängen darf, reduzieren sich die neun Taylor-Koeffizienten, die die Elastizitätskonstanten darstellen, auf zwei voneinander unabhängige Konstanten, λ , μ . Das Endergebnis lautet:

$$\left. \begin{aligned} X_x &= \lambda \operatorname{div} \mathfrak{s} + 2\mu \frac{\partial \xi}{\partial x}, \\ Y_y &= \lambda \operatorname{div} \mathfrak{s} + 2\mu \frac{\partial \eta}{\partial y}, \\ Z_z &= \lambda \operatorname{div} \mathfrak{s} + 2\mu \frac{\partial \zeta}{\partial z}, \end{aligned} \right\} (1a) \quad \left. \begin{aligned} X_y &= Y_x = \mu \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right), \\ X_z &= Z_x = \mu \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right), \\ Y_z &= Z_y = \mu \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right), \end{aligned} \right\} (1b)$$

mit $\mathfrak{s} \begin{cases} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{cases}$ Vektor der Verschiebung.

b) Stoffe mit innerer Reibung und elastischer Nachwirkung.

Beim ideal elastischen Kontinuum hängen die Spannungen definitionsgemäß nur von den Deformationen ab. Das Verhalten realer Stoffe dagegen läßt sich im allgemeinen nur durch die Aussage charakterisieren, daß die Spannungen X_{kn} und ihre zeitlichen Ableitungen mit den Deformationen e_{kn} und deren zeitlichen Ableitungen funktionell zusammenhängen:

$$f_j \left(X_{kn}, \frac{\partial X_{kn}}{\partial t}, \frac{\partial^2 X_{kn}}{\partial t^2}, \dots, e_{kn}, \frac{\partial e_{kn}}{\partial t}, \frac{\partial^2 e_{kn}}{\partial t^2}, \dots \right) = a_j. \quad (2)$$

Wir erhalten offenbar so viele Gleichungen, als unabhängige Spannungskomponenten auftreten können. Da die zeitlichen Differentialquotienten als Taylor-Koeffizienten der Reihenentwicklung der Deformationen bzw. der Spannungen nach der Zeit den gesamten zeitlichen Verlauf der Spannungen bzw. der Deformationen festlegen, hängen die Spannungen im allgemeinen von der gesamten Vorgeschichte der Bewegung, die Deformationen von der gesamten Vorgeschichte der Spannungen ab.

Wenn wir uns auf kleine Bereiche der Deformationen und ihrer zeitlichen Ableitungen beschränken, können wir unter bestimmten, hier unwesentlichen Voraussetzungen die obigen Gleichungen nach den Spannungen auflösen und die quadratischen und höheren Glieder vernachlässigen; die Spannungen erscheinen dann als Taylor-Reihe der Deformationen und ihrer zeitlichen Ableitungen. Würde auch in diesem Fall ein elastisches Potential existieren, so blieben, wie die nähere Rechnung zeigt

(vgl. Innere Reibung I), die Grundgleichungen in ihrer ursprünglichen Form (1) erhalten, während die Konstanten λ und μ in die Operatoren

$$\lambda = \lambda^0 + \lambda' \frac{\partial}{\partial t} + \lambda'' \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \dots; \quad \mu = \mu^0 + \mu' \frac{\partial}{\partial t} + \mu'' \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (3)$$

übergangen. Die Taylor-Koeffizienten λ^v, μ^v ($v = 1, 2, 3 \dots$) stellen die unendliche Zahl der Elastizitäts- und Reibungskonstanten dar, die zur Beschreibung eines realen Mediums mit unendlich vielen inneren Freiheitsgraden, wie sie durch die atomare Struktur bedingt sind, erforderlich wären. Ohne die Voraussetzung der Existenz eines elastischen Potentials würden die Grundgleichungen ihre Symmetrie einbüßen und noch weitere Operatoren der obigen Form enthalten.

Wenn wir uns auf kleine zeitliche Intervalle und kleine Bereiche der Deformationen und ihrer zeitlichen Ableitungen beschränken, kann die Existenz eines elastischen Potentials, das heißt einer nur vom augenblicklichen Bewegungszustand abhängigen potentiellen Energie in erster Näherung vorausgesetzt werden und obige Gleichungen stellen wertvolle Näherungslösungen dar. In einem besonders wichtigen Spezialfall ist die Existenz eines elastischen Potentials sogar streng gesichert, nämlich dann, wenn die Bewegung periodisch verläuft. Denn bei der periodischen Bewegung ist die Vorgeschichte der Deformation in den Fourier-Komponenten selber enthalten, so daß die potentielle Energie eine eindeutige Funktion des jeweiligen Bewegungszustandes und die Spannungen eindeutige Funktionen der Deformationen und ihrer Ableitungen werden. Für die harmonische Bewegung können die zeitlichen Ableitungen d/dt durch $j\omega$ und die Operatoren (3) λ, μ durch zwei komplexe Funktionen der Frequenz $\bar{\lambda}$ und $\bar{\mu}$ ersetzt werden:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\lambda} &= [\lambda^0 - \omega^2 \lambda'' + \omega^4 \lambda^{IV} - \dots] + j\omega [\lambda' - \omega^2 \lambda''' + \dots] = \lambda_0(\omega) + j\omega \lambda_1(\omega), \\ \bar{\mu} &= [\mu^0 - \omega^2 \mu'' + \omega^4 \mu^{IV} - \dots] + j\omega [\mu' - \omega^2 \mu''' + \dots] = \mu_0(\omega) + j\omega \mu_1(\omega). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Wir haben so nachgewiesen, daß sich das elastische Verhalten eines realen Stoffes durch zwei komplexe frequenzabhängige Elastizitätskonstanten streng darstellen läßt.

c) Die Bedeutung der komplexen Elastizitätskonstanten; Reibungs-, Hysterese- und plastische Verlustkonstante.

Um die Bedeutung der komplexen Elastizitätskonstanten zu erkennen, greifen wir auf die Gl. (1) zurück. Bei reellen Elastizitätskonstanten können die Gl. (1b) als Definitionsgleichungen des Schubmoduls aufgefaßt werden; ersetzen wir den Schubmodul durch seinen komplexen Wert Gl. (4) und den in ihm auftretenden Faktor $j\omega$ durch den zeitlichen Differentialquotienten, so nehmen diese Gleichungen folgende Form an:

$$X_y = (\mu_0 + j\omega \mu_1) \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = \mu_0 \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \mu_1 \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \quad \text{usw.} \quad (5)$$

mit

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = v_x; \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = v_y.$$

Das erste Glied der rechten Seite stellt offensichtlich die durch die Schubsteife des Mediums bedingte elastische Rückstellkraft dar; der Realteil des Schubmoduls ist somit mit der Schubsteife des Stoffes identisch. Das zweite Glied bedeutet eine der Deformationsgeschwindigkeit proportionale Gegenkraft. Da wir die Geschwindigkeit oder die der Deformationsgeschwindigkeit proportionalen Gegenkräfte als Reibungskräfte zu bezeichnen pflegen, ist μ_1 die Konstante der Schubreibung. Ein völlig

analoges Ergebnis folgt aus der Gl. (1a) für die Normalspannungen. Für X_x beispielsweise ergibt sich:

$$X_x = (\lambda_0 + j \omega \lambda_1) \operatorname{div} \mathfrak{s} + 2(\mu_0 + j \omega \mu_1) \frac{\partial \xi}{\partial x} = \lambda_0 \operatorname{div} \mathfrak{s} + \lambda_1 \operatorname{div} \mathfrak{v} + 2\mu_0 \frac{\partial \xi}{\partial x} + 2\mu_1 \frac{\partial v_x}{\partial x} \quad (6)$$

mit

$$j \omega \mathfrak{s} = \frac{\partial \mathfrak{s}}{\partial t} = \mathfrak{v}, \quad j \omega \xi = \frac{\partial \xi}{\partial t} = v_x.$$

Das erste Glied der rechten Seite bringt hier die durch die „Dilatationssteife“ hervorgerufene Rückstellkraft, das zweite die Dilatationsreibung zum Ausdruck. Das dritte und vierte Glied kennzeichnet den Beitrag der Schubsteife und der Schubreibung zur Normalspannung X_x . Durch Vorwegnahme des Faktors $j \omega$ bei der Darstellung des Imaginärteiles der Elastizitätskonstanten haben wir den Größen λ_1 , μ_1 den Charakter von Reibungskonstanten erteilt; da $\bar{\lambda}$ und $\bar{\mu}$ in noch unbekannter Weise von der Frequenz abhängen, handelt es sich zunächst nur um einen bloßen Formalismus. Wir können die Verlustkraft (= Reibungskraft) ebensogut auf die Deformationsbeschleunigung

$$j \omega \mu_1 e_{xy} = \frac{\mu_1}{j \omega} \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial t^2} = h_1 \frac{\partial^2 e_{xy}}{\partial t^2}; \quad j \omega \lambda_1 \operatorname{div} \mathfrak{s} = \frac{\lambda_1}{j \omega} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \operatorname{div} \mathfrak{s} = h_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \operatorname{div} \mathfrak{s} \quad (7)$$

mit

$$e_{xy} = \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}; \quad h_1 = \frac{\mu_1}{j \omega}, \quad h_2 = \frac{\lambda_1}{j \omega}$$

oder auf das Integral der Deformationsgeschwindigkeit beziehen:

$$\left. \begin{aligned} j \omega \mu_1 e_{xy} &= (j \omega)^2 \mu_1 \frac{e_{xy}}{j \omega} = (j \omega)^2 \mu_1 \int e_{xy} dt = p_1 \int e_{xy} dt, \\ j \omega \lambda_1 \operatorname{div} \mathfrak{s} &= (j \omega)^2 \lambda_1 \frac{\operatorname{div} \mathfrak{s}}{j \omega} = (j \omega)^2 \lambda_1 \int \operatorname{div} \mathfrak{s} dt = p_2 \int \operatorname{div} \mathfrak{s} dt \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

mit

$$p_1 = -\omega^2 \mu_1; \quad p_2 = -\omega^2 \lambda_1$$

und bezeichnen dann die neuen, ebenfalls immer von der Frequenz abhängigen Konstanten h als Hysteres-, die Konstanten p als plastische Verlustkonstanten. Der tiefere Sinn dieses Vorgehens liegt darin, daß im Idealfall der inneren Reibung, wie er z. B. bei Gasen und Flüssigkeiten für tiefe Frequenzen vorliegt, die Reibungskonstanten, in den Idealfällen der mechanischen Hysteres und des plastischen Fließens — wie wir später nachweisen werden — die Verlustgrößen h und p frequenzunabhängig werden.

d) Der Verlustfaktor und das logarithmische Dekrement.

Schließlich ist es oft zweckmäßig, die Elastizitätskonstanten in der folgenden Form zu schreiben:

$$\bar{\lambda} = \lambda_0(\omega) [1 + j \eta_\lambda] \text{ usw.} \quad \bar{B} = B_0 (1 + j \eta_B) \quad (9)$$

mit

$$\eta_\lambda = \frac{\omega \lambda_1}{\lambda_0}.$$

Die Größe η stellt die Tangente des Phasenwinkels der Deformation und der dem Elastizitätsmodul entsprechenden Komponente der Spannung, des sogenannten Verlustwinkels dar und wird als Verlustfaktor bezeichnet. Mit π multipliziert, ist η gleich dem logarithmischen Dekrement der abklingenden Eigenschwingungen des

Systems. Zum Beweis dieser Behauptung gehen wir von der allgemeinen Schwingungsgleichung aus:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{B_0}{m} (1 + j \eta) L \left(\frac{\partial}{\partial x}, \dots \right) \xi = 0. \quad (10)$$

ξ = Verschiebung,

$B = B_0 (1 + j \eta)$ komplexe Elastizitätskonstanten,

$L \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots \right)$ = linearer, die Rückstellkraft charakterisierender Differentialoperator.

Sie wird, wie man leicht nachweist, durch den folgenden Ansatz gelöst:

$$\xi = \xi_v e^{-\delta t + j \omega_v t} \quad (11)$$

mit

$$\delta = \frac{\omega \eta}{2},$$

worin ξ_v die Eigenschwingung des ungedämpften Systems darstellt und als solche der Differentialgleichung genügt:

$$-\omega_v^2 \xi_v + B_0 L \left(\frac{\partial}{\partial x}, \dots \right) \xi_v = 0. \quad (12)$$

Die „Eigenschwingungen des verlustbehafteten Systems“ sind demnach mit denen des verlustlosen Systems ihrer Amplitudenverteilung nach identisch, klingen aber exponentiell mit der Zeit ab; die Abklingkonstante ist von der besonderen Art des Schwingungsproblems völlig unabhängig und durch den Verlustfaktor der die Schwingungsgleichung beherrschenden Elastizitätskonstante festgelegt. Das logarithmische Dekrement lautet:

$$\theta_v = \delta / \xi_v = \pi \eta. \quad (13)$$

Unterschiedlich zum zeitlichen Dekrement abklingender Eigenschwingungen hängt das räumliche Dekrement fortschreitender Wellen von der Art der Schwingungsgleichung ab. Auch die Form der fortschreitenden Wellen wird im Gegensatz zu der der Eigenschwingungen durch die Dämpfung beeinflusst; bei Biegeschwingungen beispielsweise sind die abklingenden Eigenschwingungen gegeben durch:

$$\xi_v = A \sin k x e^{j \bar{\omega} t}. \quad (14)$$

$$k = \frac{v \pi}{l} = \text{reell } (v = 1, 2, 3 \dots),$$

$$\bar{\omega} = \omega + j \delta \text{ komplex.}$$

Die stationär angeregten fortschreitenden Biegewellen dagegen sind von der Form

$$\xi_v = A \cos (k x + \omega t) \quad (15)$$

$$\omega = \text{reell,}$$

$$k = \omega / c_0 \sqrt{1 + j \eta} = \text{komplex}$$

und ihr räumliches Dekrement erweist sich als nur halb so groß als das zeitliche Dekrement der abklingenden Eigenschwingungen (vgl. Innere Reibung I).

e) Stoffe mit elastischer Fernwirkung.

Durch die Berücksichtigung der zeitlichen Ableitungen der Spannungen und der Deformationen, das heißt der elastischen Nachwirkung haben wir erst einem Teil der elastischen Eigenschaften eines realen elastischen Stoffes Rechnung getragen. Grundsätzlich muß auch eine Abhängigkeit der Spannungen und der Deformationen von den räumlichen Ableitungen, das heißt eine elastische Fernwirkung in Betracht

gezogen werden. Ein Beispiel für diese Fernwirkung ist durch den Temperaturausgleich komprimierter (erhitzter) und dilatierter (abgekühlter) Stellen eines Körpers und der damit bedingten Rückwirkung auf die elastischen Spannungen gegeben. Da bei der Behandlung der Fernwirkung die räumlichen Ableitungen nicht wie die zeitlichen durch Multiplikation mit einer Konstanten ersetzbar sind und das Ergebnis wesentlich durch die Randbedingungen beeinflusst wird, läßt sich keine generelle Theorie der elastischen Fernwirkung aufstellen. Wenn wir uns aber auf isotherme oder adiabatische Vorgänge beschränken, kann nach unseren heutigen Erfahrungen die elastische Fernwirkung vernachlässigt werden.

§ 2. Einfache Relaxationserscheinungen.

a) Die Zeitgebundenheit mechanischer Vorgänge.

Die Elastizitäts- und Reibungskonstanten sind selbst in den einfachsten Fällen frequenzabhängig. Die Ursache liegt in der Zeitgebundenheit sämtlicher mechanischer Vorgänge. Es existiert keine Deformation, die den Spannungen, und keine Spannung, die den Deformationen unmittelbar folgen könnte, sondern es tritt jedesmal ein verzögernder, innerer Einschwingvorgang, eine Umgruppierung der Moleküle und ihrer inneren Schwingungen auf. Denn das innere Gleichgewicht hängt sowohl von der Temperatur, als auch vom Druck ab und muß sich nach jeder Deformation neu einstellen. Es ist daher verständlich, daß sich die elastischen Eigenschaften eines Stoffes wesentlich ändern, sobald die Schwingungsperiode mit der Einstelldauer des inneren Gleichgewichtes vergleichbar wird.

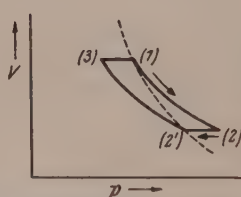
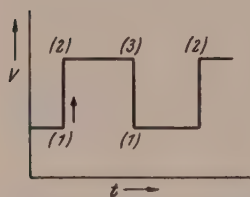
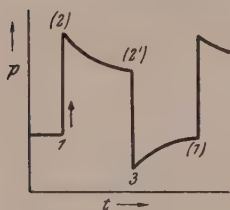


Abb. 1. Druck- und pV -Diagramm eines realen Gases bei vorgegebenem zeitlichem Verlauf seines Volumens.

b) Relaxationserscheinungen in Gasen und Flüssigkeiten^{4, 5}.

1. Physikalische Grundlagen.

Bei Gasen und Flüssigkeiten liegen besonders einfache Verhältnisse vor, da der Realteil ihres Schubmoduls, ihre Schubsteife, gleich Null ist. Wenn wir ein Gas (oder eine Flüssigkeit) plötzlich zusammendrücken⁵, so wird ihm Energie zugeführt. Diese Energie wird aber primär nur jenen Freiheitsgraden aufgeprägt, die der Volumenverminderung entgegenwirken und den Druck, oder was damit gleichbedeutend ist,

die Dilatationssteife erzeugen; bei Gasen sind es die translatorischen Freiheitsgrade. Der Druck wird bekanntlich als jene Kraft gedeutet, die von den Molekülen beim Aufprallen auf die Wandung ausgeübt wird. Im Gleichgewichtszustand verteilt sich diese Energie nach ganz bestimmten Gesetzen auf die translatorischen und rotatorischen Freiheitsgrade und die innermolekularen Schwingungen, wie sie aus den Rotations-schwingungsbanden her bekannt sind. Diese Aufteilung nimmt eine gewisse Zeit in Anspruch; der Stoff setzt also einer schnellen Volumenänderung einen größeren Widerstand entgegen als einer langsamen. Daß dabei ein gewisser Bruchteil an Energie auch irreversibel in Wärme umgesetzt wird, geht am einfachsten aus dem

⁴ L. Bergmann: Der Ultraschall und seine Anwendungen in Wissenschaft und Technik. Stuttgart: S. Hirzel. 1949. — E. Hiedemann: Ultraschallforschung. Berlin: W. de Gruyter & Co. 1939.

⁵ H. O. Kneser: Zur Dispersionstheorie des Schalles. Ann. Physik 5, 761 (1931).

in Abb. 1 dargestellten p V -Diagramm hervor. Komprimieren wir das Gas plötzlich, so steigt der Druck vom Wert (1) auf den Wert (2), der größer als der dem Volumen des Gases und seiner Temperatur entsprechende Gleichgewichtswert (2') ist. Der Überschuß an translatorischer Energie geht aber allmählich auf rotatorische und schließlich auf die innermolekularen Schwingungsfreiheitsgrade der Moleküle über und der Druck klingt nach und nach auf den Wert (2') ab. Expandieren wir das Gas wieder, so beherbergen jetzt die inneren Freiheitsgrade mehr Energie als dem Druck und der Temperatur entspricht; dieser Überschuß wird allmählich an die translatorischen Freiheitsgrade abgegeben und der Druck nimmt wieder zu. Die Fläche des p V -Diagramms ist also, wie aus der Abb. 1 hervorgeht, von Null verschieden, so daß für jeden Kompressionszyklus Arbeit geleistet werden muß. Für harmonische Schwingungen geht, wie man leicht zeigen kann, das p V -Diagramm in eine Ellipse über.

Die eben beschriebene Erscheinung stellt einen Relaxationsvorgang dar, der mit der Kompressibilität des Gases, das heißt mit seiner Laméschen Dilatationssteife verknüpft ist. Es handelt sich also sozusagen um eine Relaxation des Dilatationsmoduls.

2. Die Differentialgleichung eines einfachen Relaxationsvorganges und die Boltzmannsche Erinnerungsfunktion eines Gases oder einer Flüssigkeit.

Bei Gasen und Flüssigkeiten, die einfachen statistischen Gesetzen genügen, kann auch der Frequenzgang der Dilatationssteife und ihres Verlustwinkels berechnet werden. Wegen der Unabhängigkeit der einzelnen Elementarprozesse (der molekularen Zusammenstöße) voneinander ist die Einstellgeschwindigkeit dy/dt immer der Abweichung y vom Gleichgewichtszustand proportional. Es gilt also nach jeder Störung des Gleichgewichtes:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{\tau} y \quad \text{oder} \quad y = A e^{-t/\tau}. \quad (1)$$

Die Größe τ bedeutet die Einstelldauer des Vorganges. Da Schub- und Dilatationsmodul voneinander unabhängig sind, müssen wir zunächst die Spannungen in ihre Schub- und Dilatationsanteile zerlegen; wir setzen:

$$X_x = \lambda \operatorname{div} \vec{s} + 2\mu \frac{\partial \xi}{\partial x} = X_{x \text{ dil}} + X_{x \text{ sch}} \quad (2)$$

mit

$$X_{x \text{ dil}} = \lambda \operatorname{div} \vec{s}, \quad X_{x \text{ sch}} = 2\mu \frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

Für das Folgende beschränken wir uns der Einfachheit halber auf eindimensionale Vorgänge und betrachten den Dilatationsanteil der Spannungen. Wenn wir die Forderung stellen, daß nach jeder vorübergehenden Störung des Gleichgewichtes die Spannungen, bzw. die Deformationen exponentiell auf ihren stationären Endwert zurückgehen, gelangen wir zwangsläufig zur Differentialgleichung:

$$X_{x d} + \tau \frac{\partial X_{x d}}{\partial t} = \left(\lambda^0 + \lambda' \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} = f(t). \quad (3)$$

Setzen wir nach beendeter Störung die rechte Seite Null oder konstant, so erkennen wir, daß τ die Einstelldauer der Spannungen, die sogenannte Relaxationszeit darstellt, setzen wir die linke Seite plötzlich Null oder konstant, so ergibt sich ein entsprechender Einstellvorgang der Deformation. Geben wir die Deformation als Funktion der Zeit vor, so ist die Funktion $f(t)$ bekannt; durch Auflösen der Differentialgleichung erhalten wir dann den Verlauf der Spannung. Mit dem Ansatz

$$X_{x d} = A(t) e^{-t/\tau} \quad (4)$$

folgt endlich nach der Methode der Variation der Konstanten die Lösung:

$$X_{xx} = \int_{-\infty}^t e^{-(t-t')/\tau} \left(\lambda^0 + \lambda' \frac{\partial}{\partial t'} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} dt' = \int_{-\infty}^t \varphi_1(t') e_{xx}(t') dt' + \int_{-\infty}^t \varphi_2(t') \frac{\partial e_{xx}(t')}{\partial t'} dt' \quad (5)$$

mit

$$e_{xx} = \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad \varphi_1(t') = \frac{\lambda^0}{\tau} e^{-\frac{t-t'}{\tau}}, \quad \varphi_2(t') = \frac{\lambda'}{\tau} e^{-(t-t')/\tau}. \quad (6)$$

Das erste Integral der rechten Seite ist mit dem Boltzmannschen Nachwirkungsintegral identisch, das zweite bringt den Einfluß der inneren Reibung zum Ausdruck. Die Funktion φ_1 wurde von Boltzmann als „Erinnerungsfunktion“ eingeführt. Sie bedeutet sozusagen das Erinnerungsvermögen des Stoffes für vorangegangene Deformationen. Die Funktion φ_2 stellt entsprechend die Erinnerung des Mediums an die vorangegangenen Deformationsgeschwindigkeiten dar. Wir sehen also, daß bei Gasen und Flüssigkeiten sowohl die vorangegangenen Deformationen, als auch die vorangegangenen Deformationsgeschwindigkeiten mit einem exponentiell mit der Zeit abklingenden Gewicht

$$\frac{e^{-(t-t')/\tau}}{\tau} \quad (7)$$

nachwirken.

Wegen der Symmetrie der Relaxationsgleichung bezüglich der Spannungen und der Deformationen können wir die Rechnung umkehren und entsprechend die Deformationen als Funktionen der Spannungen darstellen:

$$e_{xx \text{ dil}} = \frac{1}{\lambda^0} \int \frac{e^{-(t-t')/t_0}}{t_0} \left(X_{x \text{ dil}} + \tau \frac{\partial X_{x \text{ dil}}}{\partial t'} \right) dt' \quad (8)$$

mit

$$t_0 = \lambda'/\lambda^0. \quad (9)$$

Ähnlich wie die Spannungen wirken demnach auch die Deformationen exponentiell nach. Die Einstelldauer der Deformationen t_0 ist grundsätzlich von der der Spannungen τ verschieden, andernfalls würde nämlich die Relaxationsgleichung zur Beziehung $X_x = \lambda^0 e_{xx}$ (also auch $\tau \frac{\partial X_x}{\partial t} = \lambda^0 \tau \frac{\partial e_{xx}}{\partial t}$) degenerieren. Wir werden später nachweisen, daß das Verhältnis t_0/τ gleich dem Verhältnis der Quadrate der Schallgeschwindigkeiten bei sehr hohen und sehr tiefen Frequenzen ist.

Wenn wir Vorgänge betrachten, die sich innerhalb von Zeitintervallen von der Größenordnung der Einstelldauer τ wenig verändern, kann die Deformation und ihre zeitliche Ableitung innerhalb des Zeitintervalls, in dem die Erinnerungsfunktion auf Null abklingt, als konstant betrachtet und vor das Integral gesetzt werden:

$$X_x \doteq \left(\lambda^0 + \lambda' \frac{\partial}{\partial t} \right) e_{xx} \int_{-\infty}^0 \frac{e^{-(t-t')/\tau}}{\tau} dt' \doteq \lambda^0 e_{xx}. \quad (10)$$

Wir erkennen so, daß die Größe λ^0 die Dilatationssteife für zeitlich langsam veränderliche Vorgänge bedeutet. Wollen wir auch die Dilatationsreibung für langsame Deformationen erfassen, so müssen wir die Näherung eine Stufe weiter treiben und bei der Auswertung des Integrals, da λ^0 immer sehr groß im Vergleich zu λ' ist, auch das erste Glied $\lambda^0 \tau \frac{\partial}{\partial t'}$ erfassen; wiederholte partielle Integration des ersten Summanden des Integrals ergibt:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^t \frac{e^{-(t-t')/\tau}}{\tau} \lambda^0 \dot{e}_{xx} dt' &= [e^{-(t-t')/\tau} \lambda^0 e_{xx}]_{-\infty}^t - \int_{-\infty}^t \frac{e^{-(t-t')/\tau}}{\tau} \tau \lambda^0 \frac{\partial}{\partial t'} e_{xx} dt' = \\
 &= \lambda^0 e_{xx} - \left[e^{-(t-t')/\tau} \tau \lambda^0 \frac{\partial}{\partial t} e_{xx} \right]_{-\infty}^t + \int_{-\infty}^t \frac{e^{-(t-t')/\tau}}{\tau} \tau^2 \frac{\lambda^0 \partial^2}{\partial t'^2} e_{xx} dt = \\
 &= \lambda^0 e_{xx} - \tau \lambda^0 \frac{\partial}{\partial t} e_{xx} + \tau^2 \lambda^0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} e_{xx} + \dots
 \end{aligned} \quad (11)$$

Wir erhalten also eine Taylor-Reihe in τ , die wir wegen der Kleinheit von τ nach den linearen Gliedern abbrechen können. Die Auswertung des ganzen Integrals (5) liefert daher:

$$X_x = \lambda^0 e_{xx} + (\lambda' - \tau \lambda^0) \frac{\partial}{\partial t} e_{xx} + \text{Glieder in } \lambda' \tau \text{ und } \lambda^0 \tau^2 \text{ usw. und solche} \quad (12)$$

höherer Ordnung.

Die Konstante der inneren Reibung für langsam verlaufende Deformationen ist somit gegeben durch:

$$\lambda_1(0) = \lambda' - \tau \lambda^0. \quad (13)$$

Wir vermerken, daß, wie schon Maxwell gezeigt hat, jede geschwindigkeitsproportionale innere Reibung als Ausläufer eines Relaxationsvorganges gedeutet werden kann.

Für die Schubspannungen, die bei Gasen und Flüssigkeiten durch die Zähigkeit hervorgerufen werden, verläuft die Rechnung völlig analog. Da die Zähigkeitsreibung auf die gaskinetische Diffusion des Bewegungsmomentes zurückgeführt wird, ist die Relaxationszeit des Schubmoduls größenordnungsmäßig durch die Zeit zwischen aufeinanderfolgenden Zusammenstößen eines Moleküls gegeben. Da dieses Zeitintervall außerordentlich klein ist, kann die Relaxationszeit τ vernachlässigt und die Zähigkeit als konstant angesehen werden.

3. Die Überlagerung mehrerer einfacher Relaxationsvorgänge.

Bisher haben wir angenommen, daß der Dilatationsanteil der Spannung sich mit einer einheitlichen Relaxationszeit einstellt; das ist aber selbst bei Gasen nie der Fall. Die Rotationsfreiheitsgrade haben vielmehr, wie wir wissen, eine bedeutend kürzere Einstelldauer als die Schwingungsfreiheitsgrade, und viele Gase wiederum weisen nicht nur eine, sondern mehrere innere Schwingungen auf, die sich nicht nur bezüglich ihrer Frequenz, sondern auch bezüglich ihrer Einstelldauer voneinander unterscheiden. Im allgemeinen müssen wir daher auch den Dilatationsanteil der Spannungen in seine verschiedenen Relaxationsvorgängen zugehörigen Komponenten zerlegen und schließlich die sich ergebenden Integrale addieren. Wir erhalten so das allgemeine Ergebnis:

$$X_{x \text{ dil}} = \sum_{-\infty}^t \frac{e^{-(t-t')/\tau_v}}{\tau_v} \left(\lambda_v^0 + \lambda_v' \frac{\partial}{\partial t'} \right) e_{xx} dt'. \quad (14)$$

Wie im einzelnen sich die Größen λ_v^0 , λ_v' auf die einzelnen Freiheitsgrade verteilen, kann nicht vorhergesagt werden. Wir wissen nur, daß bei tieffrequenten Schwingungen oder sonstigen langsam veränderlichen Vorgängen

$$\lambda^0 = \sum \lambda_v^0, \quad \lambda' = \sum (\lambda_v' - \tau_v \lambda_v^0) - \sum \tau_v \lambda_v^0 \left(\frac{t_v}{\tau_v} - 1 \right) \quad (15)$$

mit

$$t_v = \frac{\lambda_v'}{\lambda_v^0}, \quad (16)$$

t_v = Einstelldauer der Deformationsanteile

die resultierende Steife, bzw. die resultierende Dilatationsreibung sein muß.

Wir erkennen wieder, daß jeder Relaxationsvorgang bei tiefen Frequenzen oder langsam veränderlichen Vorgängen eine konstante innere Reibung erzeugt. Allein

die Tatsache, daß die Moleküle ein Rotationsmoment aufweisen, muß daher bei tiefen Frequenzen zu einer Dilatationsreibung Anlaß geben. In praktischen Fällen machen sich allerdings, wie noch näher gezeigt wird, nur die längsten Einstellprozesse bemerkbar, weshalb wir bei Gasen und Flüssigkeiten in der Regel nur einen einzigen Relaxationsvorgang berücksichtigen müssen, während wir den übrigen in Form einer konstanten zusätzlichen inneren Reibung Rechnung tragen können.

4. Die Frequenzabhängigkeit der Elastizitäts- und Reibungskonstanten bei einem einzelnen Relaxationsvorgang.

Für periodische, eindimensionale Vorgänge vereinfacht sich die Relaxationsgleichung (§ 2, 3) zu:

$$X_{xx} = \frac{\lambda^0 + j \omega \lambda'}{1 + j \omega \tau} e_{xx} = \bar{\lambda} e_{xx}. \quad (17)$$

Damit ist der Frequenzgang der Dilatationssteife $\lambda_0(\omega)$ und der Dilatationsreibung $\lambda_1(\omega)$ bei einheitlicher Relaxationszeit bestimmt; wir erhalten:

$$\bar{\lambda} = \lambda_0(\omega) + j \lambda_1(\omega) = \frac{\lambda^0 + j \omega \lambda'}{1 + j \omega \tau} = \frac{\lambda^0 + \omega^2 \lambda' \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} + j \omega \frac{\lambda' - \lambda^0 \tau}{1 + \omega^2 \tau^2}. \quad (18)$$

Weiterhin ist es zweckmäßig, eine Relaxationsfrequenz durch die Beziehung

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = 1/\tau \quad (19)$$

zu definieren und die Frequenz durch die auf die Relaxationsfrequenz bezogene „normierte Frequenz“ auszudrücken:

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_0} = f/f_0 = \omega \tau. \quad (20)$$

Die komplexe Dilatationssteife nimmt dann folgende Form an:

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda^0 + \lambda'/\tau}{1 + \Omega^2} + j (\lambda'/\tau - \lambda^0) \frac{\Omega}{1 + \Omega^2}. \quad (21)$$

Man kann leicht zeigen⁶, daß der erste Summand im wesentlichen mit dem mit der Dichte multiplizierten Quadrat der Schallgeschwindigkeit identisch ist. Bezeichnen wir die Schallgeschwindigkeit bei sehr tiefen Frequenzen mit c_0 , bei hohen Frequenzen mit c_∞ , so folgt aus der letzten Gleichung:

$$\lambda^0 = \varrho c_0^2, \quad \lambda'/\tau = \varrho c_\infty^2 = \lambda^0 (\lambda'/\lambda^0 \tau) = \lambda^0 t/\tau = \varrho c_0^2 t/\tau. \quad (22)$$

Da der Stoff mit zunehmender Frequenz steifer werden muß, ist die Einstelldauer der Deformation t_0 immer größer als die der Spannungen.

Mit den Werten (20) erhalten wir: für die komplexe Dilatationskonstante:

$$\bar{\lambda} = \varrho c_0^2 \frac{1 + \frac{c_\infty^2}{c_0^2} \Omega^2}{1 + \Omega^2} + j \varrho (c_\infty^2 - c_0^2) \frac{\Omega}{1 + \Omega^2}. \quad (23)$$

Die größten bisher in Gasen und Flüssigkeiten gemessenen Dispersionen sind etwa 10%; wir dürfen daher, ohne einen nennenswerten Fehler zu begehen,

$$\begin{aligned} c_\infty^2 - c_0^2 &= (c_\infty + c_0)(c_\infty - c_0) \approx 2c \Delta c, \\ c_\infty^2/c_0^2 &= \frac{c_\infty^2 - c_0^2 + c_0^2}{c_0^2} \approx \frac{2\Delta c + c_0}{c_0} \end{aligned} \quad (24)$$

⁶ Die Theorie der inneren Reibung in Gasen und Flüssigkeiten und die Schallabsorption. *Physica Acta Austriaca* 2, 149 (1948). Die innere Reibung in Gasen und Flüssigkeiten. *Maschinenbau u. Wärmetechn.* 3, 7 (1948).

setzen und erhalten das Ergebnis:

$$\begin{aligned}\bar{\lambda} &= \varrho c_0^2 \frac{1 + (1 + 2 \Delta c/c) \Omega^2}{1 + \Omega^2} + j \varrho c_0 \frac{2 \Delta c \Omega}{1 + \Omega^2} \\ &= \varrho c_0^2 \left(\frac{1 + (1 + 2 \Delta c/c) \Omega^2}{1 + \Omega^2} \right) \left[1 + j \frac{2 \Delta c}{c} \frac{\Omega}{1 + \Omega^2} + \dots \right], \\ &= \lambda_0 (1 + j \eta \dots).\end{aligned}\quad (25)$$

Bei der Berechnung von η konnte der Realteil von $\bar{\lambda}$ mit genügender Näherung durch ϱc_0^2 ersetzt werden. Abb. 2a zeigt den Verlauf des Realteiles der Elastizitätskonstanten oder, was damit gleichbedeutend ist, den Verlauf des mit der Dichte multiplizierten Quadrates der Phasengeschwindigkeit ebener Schallwellen. Charakteristisch für die Kurve ist der Wendepunkt bei $\Omega = c_0/c_\infty$. Abb. 2b stellt den Verlustfaktor η_λ der Elastizitätskonstanten $\bar{\lambda}$ dar, bzw., wie man leicht zeigt, die durch π dividierte Schalldämpfung (Neper) je Wellenlänge (vgl. Innere Reibung und Materialverluste I). Im logarithmischen Maßstab ergibt sich eine Glockenkurve, deren Maximum bei der Frequenz $\Omega = 1$ oder $\omega_0 = 1/\tau$ liegt. Die Höhe des Maximums ist

$$\left(\frac{2 \Delta c/c_0 \Omega}{1 + \Omega^2} \right)_{\max} = \Delta c/c_0; \quad (26)$$

sie steht in einfacher Beziehung zur Dispersion $\Delta c/c_0$ des Mediums. Einer maximalen Dispersion von 8% beispielsweise entspricht demzufolge eine maximale Schalldämpfung je Wellenlänge von $0.08 \pi = 0.25$ Neper.

Abb. 2c zeigt den Verlauf der Reibungskonstante

$$\lambda_1(\omega) = \frac{\eta}{\omega} = \frac{\tau 2 \Delta c/c_0}{1 + \Omega^2}. \quad (27)$$

Ihr Grenzwert für tiefe Frequenzen ist gegeben durch:

$$\lambda_1(0) = \lambda^0 = \tau 2 \cdot \Delta c/c_0; \quad (28)$$

er wird um so kleiner, je kleiner die Relaxationszeit ist.

Bei der Zähigkeitsreibung liegen die Verhältnisse insofern anders, als der Realteil des Schubmoduls bei tiefen Frequenzen Null ist. Die Rechnung ergibt:

$$\bar{\mu} = \frac{\omega^2 \mu' \tau_s}{1 + \omega^2 \tau_s^2} + \frac{j \omega \mu'}{1 + \omega^2 \tau_s^2} = j \omega \frac{\mu'}{1 + \omega^2 \tau_s^2}. \quad (29)$$

Wegen der Kleinheit der Zähigkeit und der Relaxationszeit konnte hier der Realteil vernachlässigt werden. Wegen der fehlenden Schubsteife tritt die Relaxationszeit im Zähler der Schubreibung nicht mehr auf, so daß die Zähigkeit trotz ihrer kleinen Relaxationszeit große Werte annehmen kann.

Schließlich läßt sich die Dispersion noch durch den Beitrag der ausfallenden inneren Schwingungen zur spezifischen Wärme ausdrücken. Bezeichnen wir mit κ_0 das Verhältnis der spezifischen Wärmen für konstanten Druck C_p und konstantes Volumen C_v bei der Frequenz 0, mit κ_∞ ihr Verhältnis bei der Frequenz unendlich, so folgt mit $C_p = C_v + R$ (R = Gaskonstante) aus der bekannten Formel für die Schallgeschwindigkeit:

$$c^2 = \kappa p/\varrho,$$

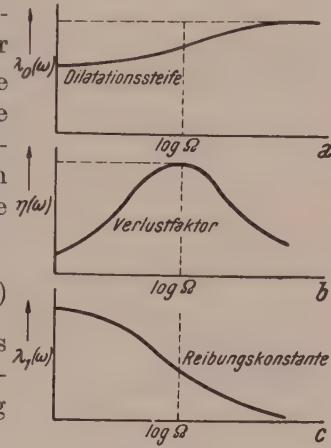


Abb. 2. Theoretischer Verlauf der Dilatationssteife, ihres Verlustwinkels und der Dilatationsreibung in Abhängigkeit von der auf die Relaxationsfrequenz bezogenen Frequenz.

$$c_{\infty}^2 - c_0^2 = (\kappa_{\infty} - \kappa_0) p/\varrho = \left(\frac{C_{\infty} + R}{C_{\infty}} - \frac{C_0 + R}{C_0} \right) p/\varrho, \quad (30)$$

$$= R \left(\frac{C_0 - C_{\infty}}{C_0 C_{\infty}} \right) p/\varrho \cong R \frac{\Delta C}{C^2} \cdot p/\varrho$$

mit

$$C_v = C, \quad C_{v0} - C_{v\infty} = \Delta C,$$

worin ΔC die spezifische Wärme der ausfallenden Freiheitsgrade und R die Gaskonstante darstellt. Da die spezifische Wärme aus Ultrarotspektren bekannt ist, kann der Absolutbetrag des Maximums für die meisten Gase aus spektroskopischen Daten berechnet werden.

5. Frequenzabhängigkeit der Elastizitäts- und Reibungskonstanten bei der Überlagerung mehrerer Relaxationsvorgänge.

Treten mehrere Relaxationsvorgänge gleichzeitig auf, so lautet die Gl. (14) entsprechende periodische Lösung:

$$\bar{\lambda} = \sum_v \frac{\lambda_v^0 + j \omega \lambda_v'}{1 + j \omega \tau_v} = \sum_v \left(\lambda_v^0 \frac{(1 + \Omega_v^2 t_v/\tau_v)}{1 + \Omega_v^2} + j \Omega_v \frac{\lambda_v' (t_v/\tau_v - 1)}{1 + \Omega_v^2} \right) \quad (31)$$

mit

$$\Omega_v = \frac{\omega}{\omega_v} = \omega \tau_v, \quad t_v = \lambda_v'/\lambda_v^0. \quad (32)$$

Es ist zweckmäßig, auch hier wieder die zugehörigen Dispersionsanteile einzuführen:

$$\frac{\varrho (c_{\infty}^2 - c_0^2)}{c_0^2} = \sum t_v/\tau_v - 1 \approx \sum 2 \varrho \frac{\Delta c_v}{c_0}. \quad (33)$$

Also ist

$$\Delta c_v/c_0 = \frac{1}{2} (t_v/\tau_v - 1).$$

Setzen wir diesen Wert in die obige Gleichung ein, so erhalten wir:

$$\bar{\lambda} = \sum \left(\lambda^0 \frac{(1 + \Omega_v^2 (1 + 2 \Delta c_v/c_0))}{1 + \Omega_v^2} + j \Omega_v \frac{2 c_0 \Delta c_v \varrho}{1 + \Omega_v^2} \right). \quad (34)$$

Die Dilatationssteife, bzw. die Dilatationsreibung für tiefe Frequenzen ist somit:

$$\lambda^0 = \sum \lambda_v^0, \quad \lambda' = \sum (\lambda_v' - \tau_v \lambda_v^0) = 2 c_0 \sum \tau_v \Delta c_v. \quad (35)$$

6. Der Einfluß der Wärmeleitung in Gasen und Flüssigkeiten.

Wenn wir ein Gas oder eine Flüssigkeit zu Schwingungen anregen, so werden zwischen den komprimierten (erhitzten) und dilatierten (abgekühlten) Stellen des Stoffes Wärmeströmungen hervorgerufen, die ihrerseits zu Phasenverschiebungen zwischen Druck und Deformation und damit zu Energieverlusten Anlaß geben. Diese Energieverluste sind offenbar eine reine Folge der Dilatation, bzw. Kompression: der entsprechende Verlustfaktor kann also nur dem Dilatationsmodul angehören. Auf Grund der bekannten klassischen Theorie der durch Wärmeleitung bedingten Schallabsorption können wir den thermisch bedingten Verlustanteil des Dilatationsmoduls ohne weiteres hinschreiben⁶:

$$\eta_{th} = D \frac{c_p - c_v}{c_v} \cdot \frac{\omega}{\varrho c_0^2} = D \frac{\kappa - 1}{\varrho c_0^2} \omega; \quad (36)$$

mit D = Temperaturleitzahl,

$\kappa = c_p/c_v$ Verhältnis der spezifischen Wärme bei konstantem Druck und konstantem Volumen c_v ,

c_0 = Schallgeschwindigkeit;

er ist der Frequenz proportional und entspricht in dieser Eigenschaft einer idealen Dilatationsreibung. Die Reibungskonstante ist:

$$\lambda_{1 \text{ ther.}}' = \eta_{\text{th}} \frac{\lambda_0}{\omega} = D \cdot (\kappa - 1). \quad (37)$$

Die im folgenden Abschnitt näher beschriebenen Tabellen enthalten unter anderen Daten auch die thermisch bedingte Dilatationsreibung für einige Gase und Flüssigkeiten.

c) Experimentelle Ergebnisse für Gase.

Da bei Gasen die Zähigkeit als frequenzunabhängig und bekannt angenommen und ihr Einfluß auf die Meßergebnisse eliminiert werden kann, ermöglichen Messungen der Phasengeschwindigkeit und der Dämpfung von Schallwellen eine sehr genaue

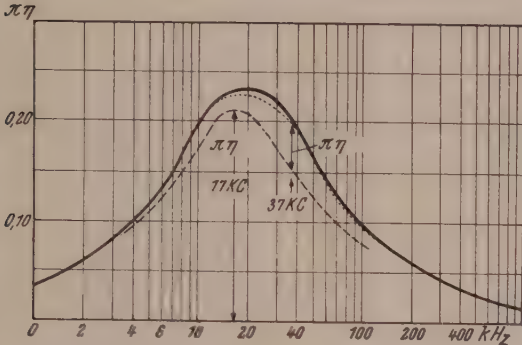


Abb. 3. Verlustfaktor der Dilatationssteife für trockenes Kohlendioxyd (nach Fricke) und seine Zerlegung in zwei Relaxationskurven (nach Pielemeier).

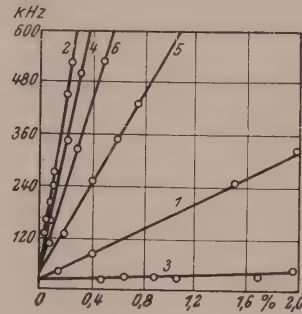


Abb. 4. Die Relaxationsfrequenz von Kohlendioxyd in Abhängigkeit vom Fremdgasgehalt (1) H, (2) H_2O , (3) H_2S , (4) $\text{C}_6\text{H}_5\text{CH}_3$, (5) CH_3OH und (6) CH_3OH_7 nach Knudsen und Fricke.

Bestimmung des Real- und Imaginärteiles der Dilatationssteife. Die Literatur enthält eine Fülle von Ergebnissen⁴, die nahezu ausnahmslos zu einer sehr befriedigenden Übereinstimmung mit den theoretischen Werten führen.

Abb. 3 zeigt als besonders interessantes Beispiel den Verlauf des Verlustfaktors von Kohlendioxyd nach Messungen von Fricke. Die Glockenkurve ist hier leicht verzerrt und läßt sich, wie Pielemeier⁷ gezeigt hat, als Überlagerung zweier zu den Relaxationsfrequenzen von 17 und 35 kHz gehörender Relaxationskurven deuten. Tatsächlich wurde das Auftreten einer zweiten Relaxationszeit durch Messungen bei verschiedenem Feuchtigkeitsgehalt einwandfrei bestätigt. Die Meßergebnisse erweisen sich in hohem Grad von Fremdgasbeimengungen abhängig⁸. Knudsen und Fricke⁹ haben nachgewiesen, daß diese Beimengungen eine wesentliche Verkürzung der Relaxationszeiten zur Folge haben, so daß sie zwar nicht den Betrag des Maximums der Glockenkurve, dafür aber seine Frequenzlage wesentlich beeinflussen. Abb. 4 zeigt die Abhängigkeit der Relaxationsfrequenz von Kohlendioxyd

⁷ W. H. Pielemeier: Supersonic measurements in CO_2 at 0 to 100°C . J. acoust. Soc. Amer. 15, 22 (1943).

⁸ E. F. Fricke: The absorption of sound in five triatomic gases. J. acoust. Soc. Amer. 12, 245 (1940). — M. H. Wallmann: Die Einstelldauer der Schwingungswärme in CO_2 in Abhängigkeit von Fremdgaszusätzen und vom Druck. Ann. Physik 21, 337 (1934). — A. Eucken und L. Küchler: Zur Frage der Stoßanregung intramolekularer Schwingungen. Z. techn. Physik 19, 517 (1938).

⁹ V. O. Knudsen und E. F. Fricke: Absorption of sound in carbon dioxide effects of impurities. J. acoust. Soc. Amer. 9, 273 (1938).

Tabelle 1. Die innere Reibung in Gasen (nach Messungen von Curtis, Großmann, van Itterbeck-Mariens, van Itterbeck-Thys, Pielemeier, Schmidtmüller).

Gas	Frequenz kHz	Dichte $\rho \cdot 10^3$	$\frac{\mu_1}{\rho} \cdot 10^2$	$\frac{\lambda_1}{\rho_1} \cdot 10^2$	$\frac{\lambda_1}{\rho_{\text{therm}}} \cdot 10^2$
Helium	250	0·163	122	947	109
	590			747	
	1000			600	
Kohlenoxyd	304	1·17	14·9	88	7·2
Kohlendioxyd	0—100	1·85	7·6	1000—7000 ¹⁰	2·75
	1215			80—500	
	1408				
Luft	0—50	1·2	15	34—2000	8
	1170				
	1200				
	1400				
Neon	304	0·84	37	167	33·4
Propan	0—100	1·9	4·2	10·3	0·7
Sauerstoff	0—50	1·33	14·3	250—8500 ¹⁰	8·14
	650			9	
	1170			4	
	1220				
Schwefeldioxyd	64	2·73	4·4	380	1·81
	100			450	
	180			270	
Stickoxyd	600	1·25	13·7		7·4
Stickstoff	0—100	1·17	14·9		8·0
Wasserstoff	300	0·084	105	1800	58·6
	600			178	

in Abhängigkeit vom Prozentsatz verschiedener Fremdgasbeimengungen^{11, 3}. Tab. 1 bringt eine Gegenüberstellung der Zähigkeits- und Dilatationsreibung für Gase, in welcher der nach der klassischen Stokes-Kirchhoffschen Theorie berechnete thermische Anteil der Dilatationsreibung gesondert aufgezählt wird. Wir entnehmen ihr, daß mit Ausnahme von Stickstoff nahezu alle Gase bei tiefen Frequenzen eine beachtliche Dilatationsreibung aufweisen, so daß ihr Verhalten weit von dem eines idealen Gases abweicht. Selbst bei den Edelgasen ist $\lambda_1 \neq 0$; ihre hohe Dilatationsreibung dürfte auf ein durch die Rotationssymmetrie der Edelgasatome begünstigtes Aneinanderkleben als Folge der van der Vallschen Kräfte zurückzuführen sein. Besonders groß ist die Dilatationsreibung von Kohlendioxyd und Sauerstoff. Hier kann die Dilatationsreibung die Zähigkeitsreibung um einen Faktor zwischen 10 und 1000 überwiegen. Bei hohen Frequenzen, wo die Relaxationszeit groß zur Schallperiode ist, so daß die inneren Schwingungen nicht mehr nennenswert durch die Schallbewegung beeinflußt werden, nimmt dann die Dilatationsreibung [vgl. Gl. (27)] umgekehrt dem Quadrat der Frequenz ab und die Zähigkeitsreibung gewinnt schließlich das Übergewicht.

d) Experimentelle Ergebnisse für Flüssigkeiten.

Auch bei Flüssigkeiten wurden in einigen Fällen Relaxationskurven beobachtet. In allgemeinen sind aber hier die inneren Schwingungen infolge des engen Abstandes der Moleküle offenbar so fest miteinander gekoppelt, daß sie stark gedämpft erscheinen und die Relaxationsfrequenzen außerhalb des heute zugänglichen Ultra-

¹⁰ Je nach Feuchtigkeitsgehalt.

¹¹ W. Kuhl und E. Meyer in: Die Schallabsorption in Wasser und Die Wasserschallschluckstoffe von E. Meyer (in Vorbereitung).

schallbereiches oberhalb 10^8 Hz liegen. Daß auch in Flüssigkeiten immer Relaxationsvorgänge auftreten, geht eindeutig aus den großen Werten der Dilatationsreibung hervor, die, außer beim einatomigen Quecksilber, die Zähigkeitsreibung um mehrere Größenordnungen übertrifft. Einige der Meßergebnisse sind in Tab. 2⁶ wiedergegeben. Beim Schwefelkohlenstoff beispielsweise, der ersten der angeführten Flüssigkeiten, ist die Dilatationsreibung etwa 2000mal größer als die Zähigkeitsreibung. Für Wasser sind Dilatations- und Zähigkeitsreibung von der gleichen Größenordnung, für das einatomige Quecksilber ist die Dilatationsreibung wie für ein ideales Gas nahezu Null. Tatsächlich weiß man, daß Quecksilber gaskinetisch einem idealen Gas sehr nahekommt.

Tabelle 2. Innere Reibung in Flüssigkeiten (nach Messungen von Willard, Biquard, Fox und Rock, Skudrzyk).

Flüssigkeit	Frequenz MHz	Dichte ϱ	$\frac{\mu_1}{\varrho} \cdot 10^8$	$\frac{\lambda_1}{\varrho} \cdot 10^3$	$\frac{\lambda_{1\text{therm.}}}{\varrho} \cdot 10^3$
Schwefelkohlenstoff	6·6	1·26	2·8	5700	0·39
Benzol	6·6 10·3	0·87	8·1	900	0·39
Tetrachlorkohlenstoff . . .	6·6 10·3	1·59	6·3	220	0·39
Azethylenchlorid	6·6 10·3	1·26	3·2	220	0·28
Chloroform	6 6 10 3	1·49	3·7	180	0·28
Terpentin	10,3	0·88	15·9	120	0·28
Nitrobenzol	6·6 10·3	1·2	16·7	110	0·33
Methylazetat	8	0·93	4·1	90	0·38
Toluol	6·6 8 10·3	0·86	6·8	80	0·33
M-Xylol	6·6 10·3	0·86	6·4	79	0·25
Äthylazetat	10·3	0·90	4·6	76	0·21
Äthylalkohol	6·6 10·3	0·79	13·9	50	0·25
Wasser	0·05—1·0	1	10	47	0·08
	8—80			17	
Azeton	6·6 10·3	0·79	3·8	46	0·43
Methylalkohol	6·6 10·3	0·79	7·0	46	0·25
Quecksilber	54	13·6	1·2	0	7·2

Bei Gelen konnten auch größere Relaxationszeiten der Zähigkeitsreibung beobachtet werden¹². Gele sind nämlich dadurch ausgezeichnet, daß sich einige der Moleküle zu einem lockeren Gerüst zusammenschließen, zwischen dem die Flüssigkeit hindurchfließt. Dieses Gerüst baut sich relativ langsam auf, so daß Relaxationszeiten von der Größenordnung einer hundertstel Sekunde ohne weiteres möglich sind.

§ 3. Die elastische Nachwirkung fester Körper.

a) *Rein mechanische Nachwirkung.*

Während bei Flüssigkeiten und Gasen die Relaxationsvorgänge streng exponentiell verlaufen oder sich zumindest aus einigen wenigen exponentiell verlaufenden Einzelvorgängen zusammensetzen, gehorchen die Relaxationsvorgänge fester Körper anderen Gesetzen. Bei Buna S beispielsweise wächst die Deformation e eines Materialstreifens nach W. Kuhl beim Anlegen einer konstanten Spannung mit der Zeit nach dem Gesetz

$$\frac{de}{dt} = e_0 a/t \tag{1}$$

oder

$$e = e_0 (1 + a \ln t).$$

¹² E. G. Richardson: Vortrag an der Technischen Hochschule in Wien.

Hierin bedeutet e_0 die Dehnung eine Sekunde nach Auflegen der Spannung, a eine Konstante, t die Zeit. Diese Formel gilt für sämtliche Werte der Zeit mit Ausnahme der dem Auflegen der Spannungen unmittelbar folgenden Intervalle. Die Deformation wächst also stetig mit der Zeit, so daß ein stationärer Gleichgewichtszustand nie erreicht wird. Entfernen wir die die Dehnung hervorrufoenden Kräfte, so kriecht der Streifen nach dem Gesetz

$$e = 0.02 e_d \sqrt{\frac{t_d}{t}} \quad (2)$$

e_d = Dehnung vor Abnahme der Spannungen,

t_d = Zeitdauer der Belastung des Streifens,

t = Zeit nach Abnehmen der Spannungen,

in seine Ruhelage zurück. Da die Belastung nie zu einem stationären Endzustand führt, hängt die Deformation nach der Entspannung des Streifens auch von der Zeitdauer der Belastung ab.

Kohlrausch¹³ fand bei kurzer Dauer der primären Deformation für zahlreiche Stoffe das Gesetz:

$$\frac{d \cdot e}{dt} = \frac{a \cdot e}{t} \quad \text{oder} \quad e = \text{konst.}/t^a, \quad (3)$$

das wieder für die der Belastung unmittelbar folgenden Zeitintervalle nicht gilt. Wenn die Zeit in Minuten gemessen wird, liegt a bei den meisten Stoffen zwischen $1/6$ und 1 . Derselben Gesetzmäßigkeit folgend soll sich auch die Annäherung an den Endzustand vollziehen, wie er bei einer plötzlich einsetzenden Kraft oder einer plötzlich einsetzenden Deformation eintritt.

Auch das elastische Verhalten fester Körper kann man als Überlagerung exponentieller Relaxationsvorgänge, wie wir sie bei Gasen und Flüssigkeiten kennengelernt haben, darstellen. So führt man die elastische Nachwirkung auf eine Summe monoton wachsender e -Funktionen zurück und umgeht die Notwendigkeit, das Verhalten jedes Stoffes durch ein eigenes Nachwirkungsgesetz zu berücksichtigen. Allerdings hat dieses Verfahren oft nur formale Bedeutung.

Für die Rechnung gehen wir von der Gleichung

$$X_x = \sum_{\tau_v} \int_{-\infty}^t \frac{e^{-(t-t')/\tau_v}}{\tau_v} \left(\lambda_v^0 + \lambda_v' \frac{\partial}{\partial t'} \right) e(t') dt' \quad (4)$$

aus, setzen sodann

$$\lambda_v^0 = g_1(\tau) d\tau, \quad \lambda_v' = \lambda_v^0 t(\tau) = t(\tau) g_1(\tau) d\tau = g_2(\tau) d\tau \quad (5)$$

mit

$$t(\tau) = \frac{\lambda_v'}{\lambda_v^0}$$

und ersetzen die Summe durch das Integral:

$$X_v = \int_{\tau=0}^{\tau=\infty} \int_{t'=-\infty}^t \frac{e^{-(t-t')/\tau}}{\tau} \left(g_1(\tau) + g_2(\tau) \frac{\partial}{\partial t'} \right) e(t') dt' d\tau \quad (6)$$

$$= \int_{-\infty}^t \varphi_1(t') e(t') dt' + \int_{-\infty}^t \varphi_2(t') \frac{\partial}{\partial t'} e(t') dt'$$

mit

$$\varphi_1(t') = \int_0^{\infty} \frac{e^{-(t-t')/\tau}}{\tau} g_1(\tau) d\tau, \quad \varphi_2(t) = \int \frac{e^{-(t-t')/\tau}}{\tau} g_2(\tau) d\tau. \quad (7)$$

¹³ F. Kohlrausch: Pogy. Ann. 119, 337 (1862); 128, 1 (1866); 158, 337 (1876).

Im letzten Integral bedeutet $g_1(\tau)$ die Dichte der Relaxationsvorgänge im Intervall $d\tau = 1$, $t(\tau)$ die Einstelldauer der Deformationen in Abhängigkeit von der der Spannungen, $\varphi_1(t')$ und $\varphi_2(t')$ die Erinnerungsfunktion des Stoffes für vorangegangene Deformationen, bzw. Deformationsgeschwindigkeiten. Da ferner [vgl. Gl. (2, 33)]

$$\frac{t_v}{\tau_v} = \frac{2 \Delta c_v}{c_v} + 1 \quad (8)$$

wegen der Kleinheit der durch die Meßergebnisse erwiesenen Dispersionen nur unwesentlich von 1 abweicht, muß die Erinnerungsfunktion für die Deformationsgeschwindigkeit, abgesehen vom Faktor $t \approx \tau$ praktisch gleich der Erinnerungsfunktion für die Deformation, das heißt $g_2(\tau) = t g_1(\tau) \approx \tau g_1(\tau)$ sein.

Wenn wir sowohl $g_1(\tau)$ als auch $g_2(\tau)$ als freie Funktionen auffassen, kann die theoretische Kurve mit jeder gewünschten Genauigkeit den Meßergebnissen angepaßt werden. Trotzdem ist diese für die innere Reibung erweiterte Boltzmannsche Methode nicht von der allgemeinst möglichen Form. Denn die ihr zugrunde liegenden Relaxationsgleichungen enthalten nur die ersten zeitlichen Ableitungen und werden daher nur sehr beschränkten Spezialfällen gerecht; im allgemeinen werden dann eben auch die durch die obige Darstellung eingeführten Erinnerungsfunktionen von der Vorgeschichte der Bewegung abhängen.

Eine strenge Behandlung der elastischen Nachwirkung, die allen auftretenden Fällen genügt, ist nur über den Umweg der Fourier-Zerlegung des zeitlichen Verlaufes der Spannungen, bzw. der Deformationen möglich. Man schiebt auf diese Art sozusagen die Verantwortung für die Vorgeschichte der Bewegung auf die Fourier-Komponenten ab und erreicht so, daß sämtliche elastischen Eigenschaften des Stoffes durch zwei komplexe frequenzabhängige Elastizitätskonstanten erfaßt werden können. Die Mannigfaltigkeit der Boltzmannschen Nachwirkungsfunktionen, die wir a priori zulassen mußten, reduziert sich für diesen Fall auf ein einziges Paar je Elastizitätskonstante.

b) Meßergebnisse für Buna S.

Für die gummielastischen Stoffe ist die Querkontraktionszahl m nur wenig von 2 verschieden. Wie ein Blick auf die Tabelle in der Arbeit „Innere Reibung I“, S. 372 lehrt, verhalten sich hier Schubmodul, E -Modul und Plattenmodul wie die Zahlen 1 : 3 : 4, während ihre Verlustfaktoren übereinstimmen und so mit denen des Schubmoduls identisch sind. Schallgeschwindigkeits- und Schalldämpfungsmessungen an dünnen Streifen oder Platten liefern daher die zweite Lamésche Elastizitätskonstante, das heißt den Schubmodul und dessen Verlustfaktor.

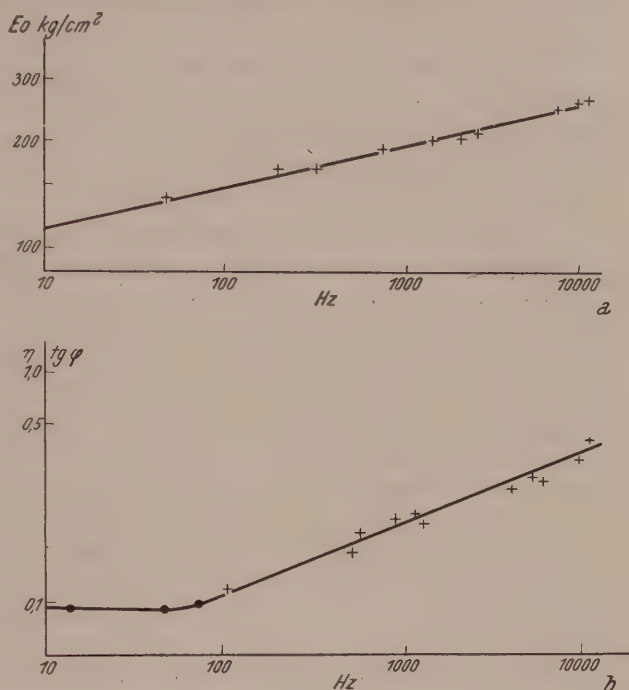


Abb. 5. E -Modul (= 3facher Schubmodul) und Verlustfaktor des Schubmoduls für Buna S (nach E. Meyer und W. Kuhl).

Abb. 5a zeigt den gemessenen Verlauf des Realteiles¹¹ des E -Moduls und des Verlustfaktors in Abhängigkeit von der Frequenz in logarithmischem Maßstab: Die Steife wächst mit zunehmender Frequenz um etwa 33% je Frequenzdekade, die Meßpunkte liegen auf einer Geraden und gehorchen der Beziehung:

$$G_0 = \frac{E}{3} = 27.6 \cdot f^{0.115} \text{ kg/cm}^2. \quad (9)$$

Da die Steife stark mit der Frequenz zunimmt, kann es sich hier nur um einen Nachwirkungsvorgang handeln. Der Verlustfaktor¹¹ (Abb. 5b) ist bei tiefen Frequenzen (0.2 Hz bis 70 Hz) zunächst konstant und von der Größenordnung 0.1, wächst aber dann mit der Frequenz um 115% je Frequenzdekade.

Fassen wir den Nachwirkungsvorgang als Überlagerung elementarer Relaxationsvorgänge auf, so läßt sich beispielsweise der Verlustfaktor abschätzen, wenn die Dispersion und ihr Frequenzgang gegeben sind. Den Messungen entnehmen wir, daß die Dispersion je Frequenzdekade etwa 20% beträgt; ihr entspricht nach (2, 26) ein maximaler Verlustfaktor von

$$\eta_{\max} \approx \pi dc/c = 0.6. \quad (10)$$

Natürlich handelt es sich hier um eine rohe Abschätzung.

Bringt man eine Bunaprobe in den Druckbauch einer stehenden Welle in einem in seiner Resonanz angeregten Rohr, so kann aus der Frequenzverschiebung und der Halbwertbreite der Schwingung der Kompressionsmodul (allseitig gleichmäßige Kompression!) und dessen Verlustfaktor bestimmt werden. Wegen $m = 2$ fällt der Verlustfaktor des Kompressionsmoduls mit dem der Laméschen Dilatationskonstanten zusammen. Solche Messungen wurden von E. Meyer und W. Kuhl bei 1200 und bei 7500 Hz durchgeführt¹¹: Die gefundenen Werte der Kompressibilität waren frequenzunabhängig und von der Größenordnung der Kompressibilität des Wassers. Als Verlustfaktor ergab sich $\eta_\lambda = 0.03$, bzw. $\eta_\lambda = 0.08$. Schließlich liegen noch Beobachtungen im Megahertzbereich vor, die eine ähnliche Kompressibilität und Werte von der Größenordnung 0.1 erbrachten. Dieses Beispiel veranschaulicht, daß Schub- und Dilatationskonstante, bzw. ihre Verlustwinkel voneinander völlig unabhängig sein können, denn während der Schubmodul und sein Verlustwinkel ständig mit der Frequenz zunehmen, bleiben die Lamésche Dilatationskonstante und ihr Verlustwinkel praktisch von der Frequenz unbeeinflusst.

Vom molekulartheoretischen Standpunkt ist das Auftreten großer Relaxationszeiten im Schubmodul für Gummi charakteristisch. Es entspricht der Tatsache, daß sich die Riesenknäuelmoleküle nach und nach unter der Schubbelastung abwickeln und nachgeben. Bei der reinen Kompression, die den Stoff von allen Seiten gleichmäßig beansprucht, können sich die Knäuelmoleküle nicht mehr abwickeln, sondern werden nur ein wenig zusammengedrückt. Gegenüber allseitig gleichmäßiger Kompression verhält sich Gummi fast so steif wie Eisen; sein Laméscher Dilatationsmodul überwiegt den Schubmodul nahezu um das 100fache. Entsprechend sind die Relaxationszeiten im Dilatationsmodul und damit auch die Verluste wesentlich kleiner als im Schubmodul. Vom mechanischen Standpunkt stellen gummiartige Stoffe infolge ihrer im Vergleich zur Dilatationssteife sehr geringen Schubsteife ein Mittelglied zwischen Flüssigkeiten und festen Körpern dar.

c) Die durch thermische Vorgänge ausgelöste innere Reibung und elastische Nachwirkung.

Bei guten Wärmeleitern wird oft ein wesentlicher Anteil der inneren Reibung durch Relaxationsvorgänge ausgelöst, die ihrerseits durch Wärmeströmungen zwischen komprimierten und dilatierten Stellen hervorgerufen wurden. Bei festen Körpern können dreierlei Ursachen für thermische Verluste verantwortlich sein.

1. Eine thermisch bedingte Dämpfung als Folge der Wärmeleitfähigkeit bei unendlich ausgedehntem Medium.

Bei Dilatationsschwingungen unendlich ausgedehnter wärmeleitender Stoffe oder bei Longitudinalschwingungen von Stäben und Platten wird durch die Wärme-strömungen wie bei Gasen und Flüssigkeiten eine Dilatationsreibung erzeugt. Setzen wir die Zahlenwerte für Aluminium oder Eisen in Gl. (2, 36) ein, so finden wir allerdings, daß diese Art der Dämpfung erst im höheren Megahertzbereich nennenswerte Werte annehmen kann, wo der Einfluß der Schallstreuung an den inneren Inhomogenitäten des Gefüges alle anderen Einflüsse bereits zu überdecken scheint.

2. Der thermische Verlustfaktor transversal schwingender Stäbe und Platten.

Bei zu Biegeschwingungen angeregten Stäben und Platten ist bei tiefen Frequenzen ein wesentlicher Anteil der Dämpfung auch auf den Temperatenausgleich zwischen den beiden Oberflächen des Materials zurückzuführen. Da hier die Entfernung zwischen den dilatierten und komprimierten Stellen, die Plattendicke, im Vergleich zur Wellenlänge sehr klein sein kann, treten durchaus beachtliche thermische Effekte auf.

Für die Berechnung des thermisch bedingten Verlustfaktors eines zu Biegeschwingungen angeregten Stabes geht man von der folgendermaßen formulierten Schwingungsgleichung eines Stabes aus¹⁴:

$$m \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = 0 \quad (11)$$

ξ = Auslenkung,

M = Biegemoment,

m = Masse je Längeneinheit,

und zerlegt das Biegemoment in zwei Anteile, in einen rein isothermen:

$$M_1 = E I \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \quad (12)$$

mit I = Trägheitsmoment des Querschnittes, bezogen auf die neutrale Ebene,

E = Elastizitätsmodul,

wie er durch die elementare Bernouillische Biegetheorie gegeben ist, und einen durch die thermische Ausdehnung, bzw. Verkürzung der komprimierten und dilatierten Stabseite bedingten Anteil:

$$M_2 = \left(\frac{\partial X_x}{\partial T} \right)_a \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} T y dy. \quad (13)$$

a = Stabdicke,

T = Temperatur,

X = Spannung.

Der Faktor vor dem Integral, die Ableitung der Spannung nach der Temperatur bei konstant gehaltenem Wärmeinhalt, ist eine Stoffkonstante; die durch die Biegeschwingung ausgelöste Temperaturerhöhung folgt aus der Wärmeleitungsgleichung:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{D}{\partial x^2} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial T}{\partial e_{xx}} \frac{\partial e_{xx}}{\partial t}. \quad (14)$$

¹⁴ Cl. Zener: Internal friction in solids. Physic. Rev. **52**, 230 (1937).

$$D = \lambda / \varrho c_p = \text{Temperaturleitzahl,}$$

$$\lambda = \text{Wärmeleitzahl,}$$

$$\varrho c_p = \text{spezifische Wärme je cm}^3.$$

Das erste Glied der rechten Seite stellt die durch Einströmen in das Einheitsvolumen erzeugte, das zweite die durch die Dehnung des Stabes ausgelöste Temperaturerhöhung dar. Für die Lösung entwickelt man die Temperatur in eine Fourier-Reihe nach der Koordinate y senkrecht zur neutralen Ebene und findet so, daß auf Grund der Randbedingungen nur ungeradzahlige harmonische Glieder in Betracht kommen und daß auf Grund der Differentialgleichung (durch Bestimmen der Amplituden) nur das erste Glied der Reihe Bedeutung hat, während alle übrigen vernachlässigt werden können. Mit Hilfe einiger in der Thermodynamik abgeleiteter Beziehungen zwischen den verschiedenen Differentialquotienten erhält man schließlich für den Verlustfaktor des Dilatationsmoduls das Ergebnis:

$$\eta_{th} = \frac{E_{ad} - E_{is}}{E_{is}} \frac{\omega_0 \omega}{\omega^2 + \omega_0^2}, \quad \omega_0 = (\pi/a)^2 D; \quad (15)$$

$$E_{ad} = \text{adiabatischer Elastizitätsmodul,}$$

$$E_{is} = \text{isothermer Elastizitätsmodul,}$$

der thermische Verlustfaktor ist demnach ähnlich gebaut wie der Verlustfaktor einfacher Relaxationserscheinungen. Führt man die Rechnung im einzelnen durch, so findet man weiter, daß die thermischen Verluste (ähnlich wie die Zähigkeitsreibung) auf den Realteil der Dilatationskonstanten keinen nennenswerten Einfluß haben.

Tab. 3 bringt in der ersten Spalte eine Zusammenstellung der Werte $\frac{E_{ad} - E_{is}}{E_{is}}$ für eine Reihe von Metallen, in der dritten die Temperaturleitzahl, in der zweiten das Maximum des thermischen Verlustfaktors (das unabhängig von der Plattendicke ist), in der Spalte 4 die Relaxationsfrequenz f_0 eines 1 cm dicken Stabes. Für die Dicke d ist die Relaxationsfrequenz f_d gegeben durch:

$$f_d = f_0/d^2. \quad (16)$$

Aus einem Vergleich zwischen dem Maximum des thermischen Verlustfaktors mit den übrigen Verlustanteilen der Dilatationskonstanten

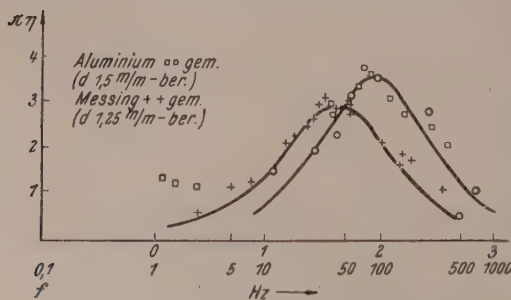


Abb. 6. Thermische Relaxationskurve eines zu Biegeschwingungen angeregten Aluminium- bzw. Messingstabes (nach Bennewitz und Röttger).

Tabelle 3¹⁴.

Metall	Maximaler Verlustfaktor d. E-Moduls η_{\max}	Temperaturleitzahl D	Relaxationsfrequenz für 1 cm Stabdicke Hz
Invar	0.00002		
W	0.0008	0.65	1.02
Bi	0.0014	0.068	0.107
P	0.0015	0.243	0.37
Au	0.0017	1.170	1.84
Sb	0.0018	0.12	0.187
Pd	0.0020	0.240	0.376
Pb	0.0024	0.237	0.356
Fe	0.0024	0.17	0.266
Ni	0.0029	0.152	0.237
Cu	0.0030	1.13	1.77
Ag	0.0034	1.74	2.72
Sn	0.0040	0.381	0.60
Al	0.0046	0.826	1.30
Mg	0.0050	0.87	1.365
Zn	0.0080	0.405	0.635
Cd	0.010	0.29	0.455
Messing		0.25	0.392

geht hervor, daß der erste bei guten Wärmeleitern bei tiefen Frequenzen alle übrigen Einflüsse um mindestens einen Zehnerfaktor überwiegt. Es ist daher verständlich, daß sich die thermisch bedingten Relaxationskurven bei tiefen Frequenzen und metallischen Leitern gut verifizieren lassen.

Abb. 6 zeigt als Beispiel den experimentell bestimmten Verlustanteil des Dilatationsmoduls für einen Aluminium- und einen Messingstab nach Bennewitz und Rötger¹⁵, durch einen Blick auf die Tab. 3 überzeugt man sich, daß die Übereinstimmung mit der theoretischen Vorhersage sehr gut ist.

3. Der durch innerkristalline Wärmeströmungen ausgelöste Verlustfaktor.

Mit zunehmender Frequenz machen sich, wie Zener¹⁶ gezeigt hat, die Wärmeströmungen innerhalb des kristallinen Gefüges immer stärker bemerkbar. Die Kristallite sind meist stark anisotrop, so daß selbst bei allseitig gleichmäßiger Kompression starke Wärmeströmungen hervorgerufen werden; jeder einzelne Kristall liefert dann einen Beitrag zum Verlustfaktor, so daß das mechanische Verhalten des Materials durch eine Überlagerung nahezu unendlich vieler einzelner Relaxationserscheinungen dargestellt wird. Das thermisch bedingte Verhalten des Materials stellt demnach einen Fall dar, für den die Boltzmannsche Integralmethode nicht nur formal, sondern auch physikalisch zutrifft.

Besonders bemerkenswert ist die Tatsache, daß die durch die innerkristallinen Wärmeströmungen ausgelösten Verluste im wesentlichen im Schubmodul auftreten. Ein kugelförmiger Hohlraum, mit dem wir unsere Kristallite in erster Näherung identifizieren, wird nämlich, wie Love¹⁷ gezeigt hat, nur dann komprimiert, wenn das Medium in seiner weiteren Umgebung Schubspannungen ausgesetzt ist. Die Dilatationsspannungen in der Umgebung des Hohlraumes dagegen geben nur zu einer Verformung, nicht aber zu einer Veränderung seines Volumens Anlaß. Da allerdings die Kriställchen in Wirklichkeit nur selten kugelförmig sein werden, muß damit gerechnet werden, daß die innerkristallinen Wärmeströmungen im allgemeinen auch eine gewisse Dilatationsreibung erzeugen.

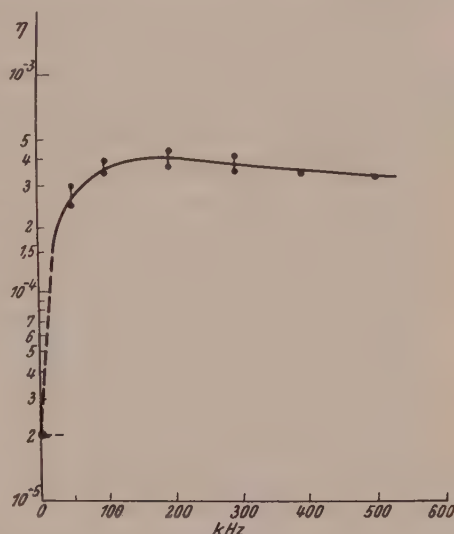


Abb. 7. Verlustfaktor des E -Moduls von Eisen.

d) Meßergebnisse für Eisen.

Abb. 7 bringt als Beispiel für die durch Wärmeströmungen innerhalb der Kristallite ausgelöste Dämpfung den Verlustfaktor (des E -Moduls) einer Eisenplatte (eigene Messungen nach dem Nachhallverfahren). Der Verlustfaktor steigt oberhalb 1000 Hz zunächst proportional der Frequenz an und wird dann konstant, um vermutlich nach höheren Frequenzen zu wieder abzufallen. Die Rechnung an Hand der durch Schliff ermittelten Kristallitgrößen führte zu einer guten Übereinstimmung mit den wieder-

¹⁵ K. Bennewitz und H. Rötger: Über die innere Reibung fester Körper. Physik. Z. **37**, 578 (1936).

¹⁶ Cl. Zener: Internal friction in solids. Physic. Rev. **52**, 230 (1937), **53**, 90 (1938).

¹⁷ A. E. H. Love: Mathematical Theory of Elasticity. Cambridge Press. 1920.

gegebenen Meßwerten. Inzwischen liegen aber auch von anderer Seite genaue Messungen an Messingstäben vor, die ebenfalls zu einer Übereinstimmung mit der Zenerschen Theorie führten.

Da der Verlustfaktor von Eisen und Messing kleiner als 10^{-3} ist, sind die zu erwartenden Dispersionswerte höchstens von der Größenordnung

$$10^{-3}/\pi \approx 3 \cdot 10^{-4};$$

also so gering, daß eine direkte Messung zur Zeit kaum möglich ist.

B. Unelastische Deformationen fester Körper.

§ 4. Die mechanische Hysterese.

a) Ideale Hysterese.

Bisher haben wir uns darauf beschränkt, das Verhalten rein elastischer, das heißt solcher Stoffe zu untersuchen, die nach Abnehmen der elastischen Spannungen schließlich wieder in ihren ursprünglichen Zustand zurückkehren. Die realen Stoffe sind aber nur in den seltensten Fällen rein elastisch, denn bei jeder Deformation wird das innere Gefüge nicht nur gedehnt, sondern oft auch verändert. Bei Metallen z. B., die kristalliner Struktur sind, springen die inneren Kriställchen in andere Lagen, werden verdreht und zerbrochen; bei Holz und ähnlichen Stoffen verlagern sich die Fäserchen oder werden voneinander losgetrennt, so daß der ursprüngliche Zustand nie oder nur sehr langsam wiederkehrt; man bezeichnet diese Erscheinung als mechanische Hysterese.

Ihrem Charakter nach entspricht auch die mechanische Hysterese einer elastischen Nachwirkung, die allerdings nicht nach unendlich langer Zeit auf Null zurückgeht, sondern dauernd erhalten bleibt. Die Spannungen sind daher auch in diesen Fällen keine eindeutigen Funktionen der Deformationen mehr, sondern hängen von der Vorgeschichte der Bewegung ab. Die vorliegende Aufgabe kann daher nicht durch eine Taylor-Entwicklung der Spannungen nach den Deformationen, sondern muß auf andere Art gelöst werden.

Bei der Berechnung der mechanischen Hysterese gehen wir zweckmäßig vom Deformationsrest aus: Nach jeder mechanischen Beanspruchung geht, wie wir gehört haben, die Deformation nicht auf den Wert Null zurück, sondern es bleibt ein der vorangegangenen Deformation proportionaler Deformationsrest bestehen:

$$\delta = \eta_H e. \quad (1)$$

η_H = Hysteresekonstante oder Hysteresemaß,

e = Deformation.

Im Idealfall ist der Deformationsrest und damit die Hysteresekonstante von der Zeitdauer der vorangegangenen Deformation unabhängig; sobald aber die Schallperiode sich der Größenordnung jener Zeitintervalle nähert, die für eine Verlagerung der Gefügeteilchen erforderlich sind, muß auch die Hysteresekonstante frequenzabhängig werden, und zwar ist bei höheren Frequenzen eine Abnahme der Hysteresekonstante zu erwarten.

Bei der periodischen Bewegung äußert sich der Deformationsrest in einer Phasenverschiebung zwischen der Deformation

$$e = E \sin \omega t \quad (2)$$

und der Spannung

$$X = B E \sin (\omega t - \varphi). \quad (3)$$

B = Elastizitätskonstante.

Definitionsgemäß geht beim Nachlassen der Spannung

$$X = 0 = B E \sin (\omega t_0 - \varphi), \quad \omega t_0 = \varphi \quad (4)$$

die Deformation in den Deformationsrest über:

$$\delta = \eta_H \cdot E = E \sin \varphi, \quad \eta_H = \sin \varphi. \quad (5)$$

Die Hysteresekonstante ist demnach mit dem Sinus des Phasenwinkels zwischen Spannung und Deformation identisch. Schließlich kann die Hysteresekonstante noch, wie aus der folgenden Gleichung hervorgeht, zum rein elastisch bedingten Verlustwinkel der Elastizitätskonstanten geschlagen werden; unter der praktisch immer erfüllten Voraussetzung, daß $\eta_H \ll 1$, gilt dann:

$$\begin{aligned} \frac{X}{e} &= \overline{B} e^{+j\eta_H} = B_0 (1 + j\eta_B) (1 + j\eta_H + \dots) \\ &= B_0 [1 + j(\eta_B + \eta_H) + \dots] = B_0 (1 + j\eta) \end{aligned} \quad (6)$$

mit

$$\eta = \eta_B + \eta_H. \quad (7)$$

Als charakteristisch für die ideale Hysteresen halten wir fest, daß der Verlustfaktor frequenzunabhängig ist, daß sie ferner in erster Näherung auf den Realteil der Elastizitätskonstante keinen Einfluß nimmt und daher auch keine Dispersion verursachen kann.

Wie später durch Meßbeispiele belegt werden wird, kann sich die Hysteresen sowohl bei der Scheerung, als auch bei der Dilatation auswirken; im allgemeinen wird die Hysteresekonstante des Schubmoduls von der des Dilatationsmoduls verschieden sein.

Bei tiefen Frequenzen, wo die Deformationsgeschwindigkeiten sehr gering sind, spielen die geschwindigkeitsproportionalen Verluste keine Rolle; hier sind es nur die Hystereseverluste, die in Erscheinung treten. Eine Schwingungsbedämpfung tiefer Frequenzen ist somit — von wenigen Ausnahmen abgesehen — nur auf Grund der mechanischen Hysteresen des Materials möglich. Die geschwindigkeitsproportionalen Verluste, das heißt die Reibungs- oder Nachwirkungsverluste machen sich erst bei höheren Frequenzen bemerkbar; der Nachwirkungsanteil des Verlustfaktors (= Reibungsanteil) steigt dann stark mit der Frequenz an, bis schließlich die Hysteresen durch die innere Reibung völlig verdeckt wird.

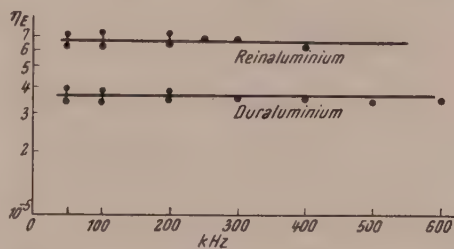


Abb. 8. Der Verlustfaktor des E -Moduls von Reinst- und Duraluminium.

b) Meßergebnisse für Aluminium.

Abb. 8 zeigt als Beispiel für die ideale Hysteresen den Verlustfaktor (des E -Moduls) für einige Aluminiumsorten (eigene Messungen nach dem Abklingverfahren). Im Gegensatz zum Verlustfaktor für Eisen und Messing ist der Verlustfaktor von Aluminium im Frequenzbereich 10 000 bis 500 000 Hz nahezu völlig frequenzunabhängig. Tatsächlich erweist die nähere Rechnung unter Berücksichtigung der durch Schliff bestimmten Kerngröße, daß hier die thermische Relaxationsdämpfung nur ein Zehntel der gemessenen Dämpfung beträgt und daher keinerlei nennenswerten Einfluß auf das Meßergebnis haben kann. Bemerkenswert ist die Tatsache, daß der Zustand des inneren Gefüges, ob hart oder weich, ob bearbeitet oder ausgeglüht, in der inneren Dämpfung zum Ausdruck kommt. Entsprechend nimmt auch die Dämpfung bei Aluminium mit der Materialhärte ab; die größten Werte wurden für das weiche Reinstaluminium festgestellt, die kleinsten für Duraluminium. Bei gedrückten Aluminium-

behalten konnte sogar eine Alterung beobachtet werden: Im Verlauf eines Jahres stieg ihre Dämpfung auf etwa das Doppelte.

c) Reale Hysterese, verknüpft mit Relaxation.

Im allgemeinen muß — wie bereits erwähnt — auch mit einer Abhängigkeit des Deformationsrestes von der Zeitdauer der Deformation gerechnet werden, so daß der Hysteresefaktor frequenzabhängig wird. Schließlich wird auch ein Teil des Deformationsrestes allmählich auf Null zurückgehen, indem z. B. durch die ver-

bliebenen inneren Spannungen das eine oder andere Kriställchen, das eine oder andere Fadenmolekül, unterstützt durch die Wärmebewegung, in seine ursprüngliche Lage findet. Der Hysterese wird daher zu einem gewissen Grad auch der Charakter der Relaxationserscheinungen anhaften, ja es werden Fälle auftreten, wo eine strenge Unterscheidung zwischen Hysterese und Relaxation nicht mehr möglich ist.

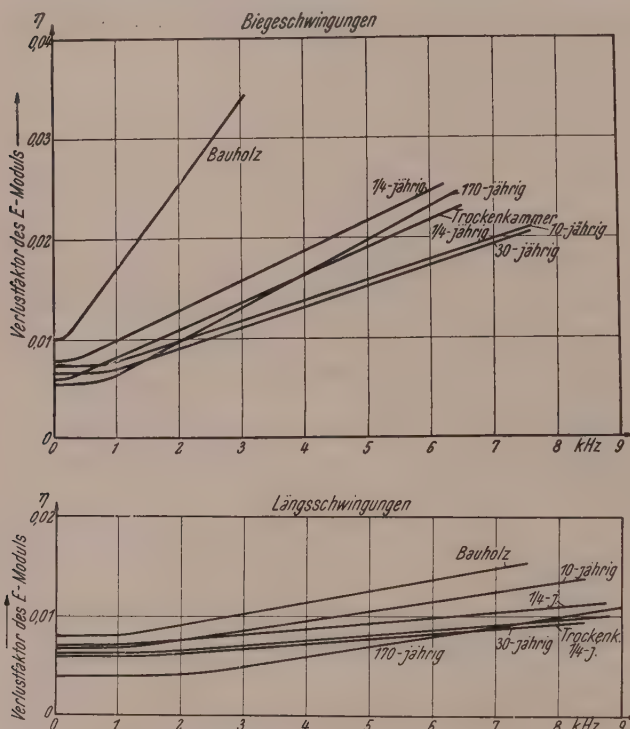


Abb. 9. Der Verlustfaktor des E -Moduls für verschieden alte Klangfichten (Diplomarbeit Ptacnik, Schwachstrominstitut der Technischen Hochschule Wien).

d) Meßergebnisse für Klangholz.

Abb. 9 gibt als typisches Beispiel für Hysterese mit überlagerter Nachwirkung die Meßergebnisse für eine Klang- und eine Bauweise wieder: Der Realteil des E -Moduls ist innerhalb der Meßgenauigkeit frequenzunabhängig, der Imaginärteil bei tiefen Frequenzen konstant, nimmt aber dann mit der Frequenz stark zu. Hier handelt es sich offenbar um eine mit elasti-

scher Nachwirkung verbundene Hysterese. Bei tiefen Frequenzen ist es nur die Hysterese, die in Erscheinung tritt, bei hohen Frequenzen überlagert sich dem Verlustfaktor ein mit der Frequenz stark zunehmender Reibungsanteil.

Daß es sich bei Holz bei tiefen Frequenzen um eine Hysterese und nicht um einen Relaxationsvorgang handelt, erweist eine Messung des Deformationsrestes: Belastet man einen Probestab mit einem Gewicht, so kann man leicht mit einer Meßuhr den Deformationsrest bestimmen. Musikinstrumentenbauer pflegen so das Klangholz auf seine Eignung zu prüfen. Da für die Qualität eines Musikinstrumentes die geringe Bedämpfung der tiefen Töne entscheidend ist, trifft dieses Verfahren den Kern des Problems.

Aus den Messungen an Klangfichten geht weiter hervor, daß die für die Schallabstrahlung maßgebenden Transversalschwingungen wesentlich stärker bedämpft sind als die Longitudinalschwingungen; bei tiefen Frequenzen wird die Dämpfung um so kleiner, je älter das Holz ist, bei hohen Frequenzen liegen die Verhältnisse entgegengesetzt. Auf Grund unserer heutigen Vorstellungen über die Grundlagen

des musikalischen Zusammenklangs bedeutet dieses Ergebnis, daß alte Musikinstrumente im allgemeinen wohl tragfähiger sind und wärmer klingen, daß sie aber guten modernen Instrumenten an Brillanz unterlegen sein müssen, so daß es letzten Endes eine Frage des persönlichen Geschmacks wird, für welche wir uns entscheiden¹⁸.

Der Frequenzgang des Verlustfaktors läßt auf die innere Struktur des Holzes schließen. Zunächst erkennen wir, daß der Hysteresefaktor für zur Faserrichtung transversal verlaufende Schwingungen etwas größer ist, als für Longitudinalschwingungen; bei der transversalen Bewegung werden offenbar die inneren Fasern ineinander verwickelt und gegeneinander verschoben, während sie bei der longitudinalen Deformation im wesentlichen elastisch gedehnt werden.

Da im Verlauf der Jahre die Struktur des Holzes durch innere Umwandlungen homogener wird, nimmt der Hysteresefaktor mit zunehmendem Alter des Holzes ab; zugleich scheint die innere Reibung zu wachsen; der E -Modul alten Holzes übertrifft den frischer Hölzer um Werte bis zu 50%. Bemerkenswert ist schließlich noch, daß die innere Reibung des Holzes durch den Einfluß von Feuchtigkeit drei- bis zehnmal so groß wird und auch bei Temperaturerhöhung wächst (Dissertation Ptacnik, Wien), während der Hystereseanteil des Verlustfaktors unverändert bleibt.

e) Meßergebnisse für tierisches Gewebe.

Ein weiteres, sehr anschauliches Beispiel für eine reale, mit Relaxation verknüpfte Hysterese ist tierisches Gewebe. Messungen von Pohlmann und Hüter¹⁹ ergeben hier einen Verlustfaktor, der im gesamten Frequenzbereich zwischen 400 kHz und 4500 kHz praktisch frequenzunabhängig ist (Abb. 10). Es ist außerordentlich unwahrscheinlich, daß in allen diesen Fällen der konstante Frequenzgang aus einer Überlagerung einzelner, stark frequenzabhängiger Relaxationsvorgänge oder aus einem besonderen Nachwirkungsgesetz entstand, wir werden vielmehr in der Annahme einer Art idealer Hysterese kaum fehlgehen. Trotzdem muß dieser Hysterese eine oder müssen ihr mehrere Relaxationserscheinungen mit tiefliegenden Relaxationsfrequenzen überlagert sein, die sich nur bei tiefen Frequenzen auswirken. Andernfalls würde nämlich tierisches Gewebe wegen seines kleinen Hysterese faktors bei tiefen Frequenzen ähnlich lange nachklingen wie Klangholz, was offensichtlich nicht zutrifft.

Das Meßergebnis wirft auch ein Licht auf den Wirkungsmechanismus des Ultraschalles. Es zeigt, daß die Zellen durch jede Ultraschallschwingung verformt und so in Übereinstimmung mit der verbreiteten Auffassung massiert und durchknetet werden. Einige Promille der ursprünglichen Deformation bleiben zunächst jedesmal als Deformationsrest erhalten, klingen aber dann vermutlich mit einer relativ großen Zeitkonstante, wie sie den überlagerten tiefen Relaxationsvorgängen entspricht, auf Null ab. Die sogenannte Flüssigkeitsreibung scheint für diesen Prozeß bedeutungslos zu sein.

Für einen Relaxationsvorgang bei tiefen Frequenzen spricht weiter die Tatsache, daß bei Ultraschallbestrahlung die Wirkung wesentlich davon abhängt, ob Gleich-

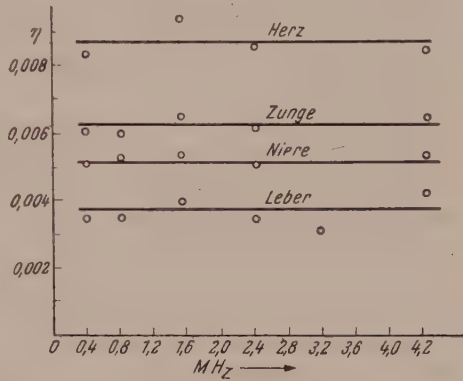


Abb. 10. Der Verlustfaktor für tierisches Gewebe für Schallschwingungen im Frequenzbereich 400 kHz bis 4·5 MHz nach Messungen von Hüter und Pohlmann.

¹⁸ Die Bedeutung der Ausgleichsvorgänge für Musik und Tonübertragung. Elektrotechn. u. Maschinenbau 67, 1 (1950).

¹⁹ R. Pohlmann: Die Ultraschalltherapie. Bern: H. Huber. 1951.

schall, Impulsschall (z. B. 50 Sinusimpulse je Sekunde) oder Wechselschall verwendet wird (die Bezeichnung bezieht sich auf die Enveloppe der Schallschwingungen). Im ersten Fall erfolgt die Behandlung im näherungsweise eingeschwungenen Zustand, im zweiten muß das Gewebe entsprechend der Enveloppenmodulation immer wieder neu einschwingen.

f) Falsche Hysterese.

Hin und wieder ist der Verlustfaktor frequenzunabhängig, so daß man bei oberflächlicher Betrachtung auf hystereseartiges Verhalten des Materials schließen würde. Als Beispiel hierfür sei das bereits besprochene Buna S genannt: Betrachten wir im letzten Fall den Realteil der Elastizitätskonstanten, so beobachten wir, daß er auch bei tiefen Frequenzen stark mit der Frequenz ansteigt, so daß es sich nur um eine elastische Nachwirkung handeln kann. Tatsächlich zeigt auch die nähere Rechnung, daß das hystereseartige Verhalten durch den besonderen Verlauf der elastischen Nachwirkung vorgetäuscht wird. Wollen wir sichergehen, so messen wir noch den Deformationsrest; ist er Null, so kann über den Charakter der Erscheinung kein Zweifel mehr bestehen.

§ 5. Plastisches Fließen.

Sobald die Spannungen eine bestimmte Grenze überschreiten, beginnen sich die meisten Stoffe plastisch zu verformen; aber auch bei geringen Spannungen muß bei sehr tiefen Frequenzen mit einem, wenn auch geringfügigen plastischen Fließen gerechnet werden. Wir müssen uns daher auch dem Studium der plastischen Vorgänge zuwenden. Um die Rechnung möglichst zu vereinfachen, wollen wir voraussetzen, daß die plastische Komponente der Deformation sehr klein im Vergleich zu ihrer elastischen Komponente ist. Wir gehen dann von der Erfahrungstatsache aus, daß eine allseitig gleichmäßige Spannung oder Deformation keine plastische Verformung bewirken kann und führen so das plastische Fließen auf die Unsymmetrie des Spannungszustandes, bzw. auf dessen Abweichungen vom allseitig gleichmäßigen Spannungszustand zurück.

Die dem allseitig gleichmäßigen Druck entsprechende Spannungskomponente ist offenbar durch den Mittelwert der Normalspannungen gegeben:

$$X_m = \frac{1}{3} (X_x + Y_y + Z_z) = \lambda \operatorname{div} \mathfrak{s} + \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \mathfrak{s}. \quad (1)$$

Der restliche Anteil der Normalspannungen ist:

$$X_x - X_m = \lambda \operatorname{div} \mathfrak{s} + 2 \mu e_{xx} - \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \operatorname{div} \mathfrak{s} = \mu \left(\frac{4}{3} e_{xx} - \operatorname{div} \mathfrak{s} \right). \quad (2)$$

Wenn wir uns auf eindimensionale Vorgänge beschränken, wird:

$$\operatorname{div} \mathfrak{s} = e_{xx} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (3)$$

und

$$X_x - X_m = \frac{4}{3} \mu e_{xx}. \quad (4)$$

Wir setzen nunmehr die durch das plastische Fließen bedingte Deformationsgeschwindigkeit dieser die Abweichung vom gleichmäßigen Druck beschreibenden Spannungskomponente proportional:

$$\frac{d}{dt} (e_{pl}) = j \omega e_{pl} = \nu (X_x - X_m) = \frac{4}{3} \nu \mu e_{el} = p e_{el} \quad (5)$$

und definieren durch diese Gleichung die Konstante p des plastischen Fließens, in der e_{pl} als die sehr klein vorausgesetzte plastische Komponente der Deformation,

e_{el} als die rein elastische Komponente auftritt. Die gesamte Deformation ist somit gegeben durch:

$$e_{xx} = e_{pl} + e_{el} = \frac{p}{j\omega} e_{el} + e_{el} = (1 - j p/\omega) e_{el} \quad (6)$$

oder

$$e_{el} = e_{xx} (1 + j p/\omega + \dots). \quad (7)$$

Wenn wir jetzt, wie üblich, unsere Elastizitätskonstanten auf die gesamte Deformation beziehen, tritt ähnlich wie bei der Hysteresse zu jeder der Elastizitätskonstanten der Faktor $(1 + j p/\omega)$ hinzu:

$$B = B_0 (1 + j \eta_{el} + \eta_H) (1 + j p/\omega) = B_0 (1 + j \Sigma \eta) = B_0 (1 + j/\eta_{el} + \eta_H + \eta_{pl}) \quad (8)$$

mit

$$\eta_{pl} = p/\omega.$$

Daß der Verlustfaktor wie in dem der theoretischen Behandlung zugrunde gelegten Idealfall umgekehrt proportional der Frequenz ansteigt, ist in realen Fällen wegen der Verwickeltheit der inneren Vorgänge, bzw. wegen der zugelassenen Vernachlässigungen bei der Rechnung allerdings nicht zu erwarten.

Das plastische Fließen führt demnach in erster Näherung zu einem der Frequenz

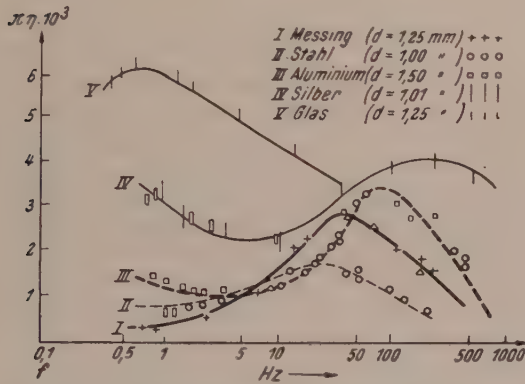


Abb. 11. Plastisches Fließen bei tiefen Frequenzen.

umgekehrt proportionalen Verlustfaktor, und zwar, wie aus Gl. (5) hervorgeht, des Schubmoduls. Je tiefer die Frequenz, desto größer ist die Zeit, die für das Fließen des Stoffes zur Verfügung steht, desto größer sind auch die plastischen Verluste.

Das plastische Fließen kann im Rahmen unserer Näherung auch als eine der Zeit proportionale Hystereserscheinung aufgefaßt werden. Von diesem Standpunkt kommen wir zum Ergebnis, daß unter Umständen auch mit einem plastischen Verlustanteil des Dilatationsmoduls gerechnet werden muß.

Schließlich kann man jeden Relaxationsvorgang bei Frequenzen genügend oberhalb der Relaxationsfrequenz als plastisches Fließen deuten. Denn bei hohen Frequenzen ist wie beim gewöhnlichen plastischen Fließen der Realteil der Elastizitätskonstanten konstant, während ihr Verlustwinkel umgekehrt proportional der Frequenz abnimmt. Bei hohen Frequenzen, das heißt für kurze Zeitintervalle, können eben die exponentiell verlaufenden Einstellvorgänge durch ein lineares Zeitgesetz dargestellt

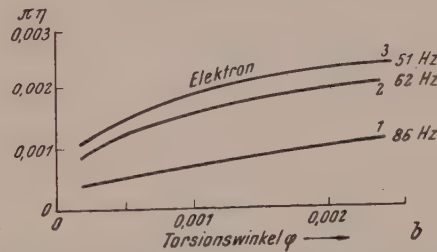
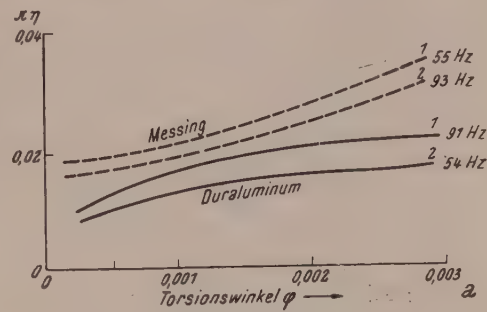


Abb. 12. Plastisches Fließen bei tiefen Frequenzen bei Elektron, bei Messing und Duraluminium (nach H. Kortum).

werden, das die Einstellungsgeschwindigkeit wie beim plastischen Fließen konstant und der Spannung proportional erscheinen läßt.

Zur Veranschaulichung des plastischen Fließens sind in Abb. 11 Messungen von Bennewitz und Rötger¹⁵ zum Nachweis der thermischen Dämpfung in zu Biegeschwingungen angeregten Stäben wiedergegeben. Die in der Kurve bei hohen Frequenzen auftretenden Maxima entsprechen der in § 3, c behandelten thermischen Relaxation. Bei sehr tiefen Frequenzen dagegen scheint der Anstieg der Meßwerte ein plastisches Fließen anzudeuten.

Abb. 11 und Abb. 12 zeigen einige weitere, von H. Kortum²⁰ ausgeführte Untersuchungen für Torsionsschwingungen bei Frequenzen zwischen 50 und 90 Hz. Als Ordinate

ist das logarithmische Dekrement, das heißt die Größe $\pi \eta_\mu$, als Abszisse der Torsionswinkel aufgetragen. Danach nimmt, einem idealen plastischen Fließen entsprechend, bei tiefen Frequenzen der plastische Verlustfaktor nahezu der Frequenz umgekehrt proportional zu. Bemerkenswert ist die in diesen Kurven zum Ausdruck kommende starke Zunahme der Dämpfung mit dem Torsionswinkel, das heißt der Belastung. Das plastische Fließen wächst offenbar mit zunehmender Belastung des Stabes.

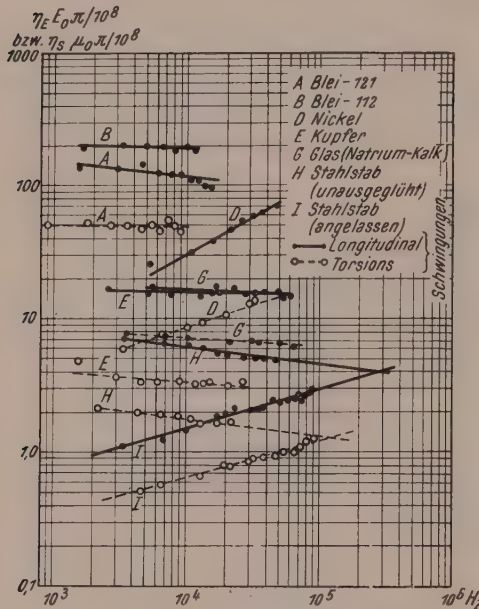


Abb. 13. Der Verlustfaktor für Torsions- und Längsschwingungen von Stäben (nach Wegel und Walther).

bringt einen Teil ihrer Ergebnisse: Die Ordinate stellt den mit π multiplizierten Imaginärteil des E -Moduls (vollausgezogen), also die Größe $\pi \eta E_0$, bzw. des Schubmoduls (gestrichelt), das ist $\pi \eta \mu_0$ dar. Diese Größen sind nämlich formal mit der auf die Einheit des Quadrates der Deformationsgeschwindigkeit bezogenen Fläche der entsprechenden Hysteresisschleifen identisch. Da nun bei Metallen und Glas Schubmodul und E -Modul praktisch frequenzunabhängig sind, ist mit ihnen zugleich der Verlauf der Verlustfaktoren bis auf einen vom Elastizitätsmodul abhängigen konstanten Faktor festgelegt.

Der Verlustfaktor des E -Moduls kann aus dem Verlustfaktor des Schubmoduls und dem der Dilatationssteife berechnet werden. Wie in „Innere Reibung I“ abgeleitet wurde, gilt die Beziehung:

$$\eta_E = \frac{(m_0^2 + 2) \eta_\mu + (m_0 - 2) \eta_\lambda}{m_0 (m_0 + 1)} \quad (1)$$

²⁰ H. Kortum: Über die Materialdämpfung bei Dauerbeanspruchung durch Torsionsschwingungen. Technische Mechanik und Thermodynamik (monatliche Beihefte zur VDI-Zeitschrift) 1, Nr. 8, 277 (1930).

²¹ R. L. Wegel und H. Walther: Internate dissipation in solids; Physics 6, 141 (1935).

$m_0 =$ Poissonsche Querkontraktion ($m > 2$) (Realteil).

Für Metalle ist m_0 näherungsweise gleich 3·4; setzen wir diesen Wert ein, so folgt:

$$\eta_E = 0.91 \eta_\mu + 0.09 \eta_\lambda, \quad \text{das heißt} \quad \eta_E \geq 0.91 \eta_\mu. \quad (2)$$

Der Verlustfaktor des E -Moduls ist demnach mindestens 0.91mal so groß als der des Schubmoduls. Sind anderseits die Verlustfaktoren des Schub- und E -Moduls gegeben, so folgt der Verlustfaktor des Dilatationsmoduls aus der Gleichung:

$$0.09 \eta_\lambda = \eta_E - 0.91 \eta_\mu \quad \text{oder} \quad \eta_\lambda = 11 \eta_E - 10.1 \eta_\mu. \quad (3)$$

a) Blei.

Ausgeprägte Hysterese im Schubmodul bei vernachlässigbaren inneren Reibungen.

Zunächst betrachten wir die Kurven (A) für Blei 121; aus ihrem frequenzunabhängigen Verlauf bei tiefen Frequenzen geht hervor, daß es sich hier nur um eine Hysterese handeln kann. Für Blei ist $m_0 = 2.2$. Gl. (1) lautet also:

$$\eta_E = 0.97 \eta_\mu + 0.03 \eta_\lambda. \quad (4)$$

Mit den Werten $E_0 = 0.145 \cdot 10^{12}$ bis $1.7 \cdot 10^{12}$ dyn/cm² bzw. $0.08 \cdot 10^{12}$ dyn/cm² für den Realteil des E - bzw. des Schubmoduls folgt aus den Meßpunkten für tiefe Frequenzen:

$$\begin{aligned} \eta_\mu &= \frac{1}{\pi \mu_0} \cdot 50 \cdot 10^8 = 0.0395, \\ \eta_E &= \frac{1}{\pi E_0} \cdot 150 \cdot 10^8 = 0.028 \text{ bis } 0.033. \end{aligned} \quad (5)$$

In diesem Fall ist also der Verlustfaktor des E -Moduls kleiner als er auf Grund der Theorie sein dürfte, so daß die Genauigkeit der Meßergebnisse zweifelhaft erscheint. Es ist wahrscheinlich, daß sich hier wegen der geringen Schallgeschwindigkeit im Blei die endliche Dicke des Stabes bemerkbar macht und daß besonders bei höheren Frequenzen der für Longitudinalschwingungen gemessene Verlustfaktor allmählich in den Verlustfaktor von Dilatationswellen in unendlich ausgedehnten Medien ($\eta_E = 0.58 \eta_\mu + 0.42 \eta_\lambda$; vgl. Tabelle in innere Reibung I²) übergeht und entsprechend kleiner wird. In diesem Sinne wäre auch die Abnahme des Verlustfaktors des E -Moduls mit der Frequenz im Gegensatz zu dem des Schubmoduls zu deuten. Für Blei 112 (B) ist auch der Verlustfaktor des E -Moduls konstant; das innere Gefüge hat hier offenbar so ausgeprägte unelastische Eigenschaften, daß der Hystereseffaktor alle übrigen Verlustfaktoren überdeckt.

b) Nickel.

Geringe Hysterese bei besonders starker innerer, offenbar durch den Magnetostriktionseffekt bedingter Dilatationsreibung.

Die Meßkurven für Nickel steigen stark mit der Frequenz an, was auf innere Relaxationerscheinungen, bzw. eine ausgeprägte innere Reibung hindeutet. Mit den Werten $2.03 \cdot 10^{12}$ und $0.79 \cdot 10^{12}$ für die Realteile des E - und Schubmoduls ergäbe sich beispielsweise für die Frequenz von 10000 Hz:

$$\eta_\mu = 3.5 \cdot 10^{-4}, \quad \eta_E = 4.73 \cdot 10^{-4}. \quad (6)$$

In diesem Fall ist der Verlustfaktor des E -Moduls bedeutend größer als der des Schubmoduls, was auf eine starke Dilatationsreibung schließen läßt. Tatsächlich überwiegt in beiden Verlustkonstanten der proportional mit der Frequenz ansteigende Reibungsanteil in dem Maß, daß der Reibungsanteil des E -Moduls, wie aus dem Anstieg der

Kurven (log. Maßstab!) hervorgeht, mehr als das Zehnfache des Schubmoduls beträgt. Aus den obigen Werten folgt:

$$\eta_{\lambda} = (52 - 35.4) \cdot 10^{-4} = 16.6 \cdot 10^{-4}. \quad (7)$$

Wie in § 3, c, 3 festgestellt wurde, haben die Wärmeströmungen im kristallinen Gefüge ausgeprägte Relaxationserscheinungen im Schubmodul zur Folge, während der Dilatationsmodul nur unwesentlich beeinflusst wird. Der große Verlustfaktor des Dilatationsmoduls von Nickel darf daher nicht auf thermische Ursachen zurückgeführt, sondern muß durch zusätzliche, bisher nicht berücksichtigte, mit der Dilatation verknüpfte Relaxationsvorgänge erklärt werden. Tatsächlich werden ja zusätzliche Dämpfungen durch magnetische Effekte, bei Nickel offenbar vor allem durch seine magnetostriktive Wirkung hervorgerufen²² (vgl. auch weiter unten).

c) Eisen.

1. Unausgeglühter Stahlstab: Die inneren Spannungen verursachen im Schub- und Dilatationsmodul eine starke mechanische Hysterese, die alle übrigen Einflüsse verdeckt.

Die Kurven H wurden für einen unausgeglühten Stahlstab gewonnen; zum erstenmal beobachteten wir hier einen mit der Frequenz eindeutig abnehmenden Hysterese-faktor. Die nichtelastische Verformung des Gefüges wird hier offenbar größer, wenn die Deformation länger andauert (ein plastisches Fließen kommt bei diesen Frequenzen noch nicht in Betracht). Mit den Werten für Eisen: $E_0 = 2 \cdot 10^{-12}$, $\mu_0 = 0.8 \cdot 10^{12}$ erhalten wir für die Frequenz 10 kHz:

$$\eta_E = 9.6 \cdot 10^{-5}, \quad \eta_{\mu} = 7.2 \cdot 10^{-5} \quad (8)$$

und folglich

$$\eta_{\lambda} = (105.6 - 70.7) = 10^{-5} = 33 \cdot 10^{-5}.$$

Beim unausgeglühten Stahlstab treten also zu den Schubverlusten beachtliche Dilatationsverluste hinzu.

2. Der gleiche Stahlstab, durch Ausglühen von seinen inneren Spannungen befreit: Starker Rückgang der Hysterese; die offenbar thermisch bedingte Schubreibung überwiegt alle anderen Einflüsse; vernachlässigbare Dilatationsreibung.

Nach dem Ausglühen des Stahlstabes wurden die Kurven I ermittelt: Die Hysterese ist, wie man auf den ersten Blick erkennt, auf weniger als $1/32$ (im Schubmodul) bzw. $1/40$ (im Dilatationsmodul) ihres ursprünglichen Wertes zurückgegangen, so daß nunmehr auch der mit der Frequenz ansteigende Reibungsanteil der Elastizitätskonstanten in Erscheinung tritt. Aus den Meßergebnissen folgt für die Frequenz von 10 kHz wieder:

$$\eta_E = 2.4 \cdot 10^{-5}, \quad \eta_{\mu} = 2.6 \cdot 10^{-5}, \quad (9)$$

$$\eta_{\lambda} = (26.8 - 26.2) \cdot 10^{-5} = 0.6 \cdot 10^{-5}.$$

Da aber hier der Verlustfaktor des Schubmoduls sich zu dem des E -Moduls wie 1 : 0.92 verhält, ist die Dilatationsreibung wesentlich kleiner als die Schubreibung.

Als charakteristisch fällt ins Auge, daß die Verluste vor allem im Schubmodul auftreten, was darauf schließen läßt, daß es sich in Übereinstimmung mit den in § 3, c, mitgeteilten Ergebnissen wohl nur um Wärmeströmungen innerhalb des inneren Gefüges handeln kann.

²² Theorie der elektroakustischen Wandler und ihre Anwendung zur Berechnung des Ersatzschaltbildes eines Magnetostruktionsschwingers und eines Ultraschallquarzes. Nuovo Cimento, Kongreßberichte der Ultraschalltagung in Rom, 1950.

d) Glas.

Mit der Frequenz abnehmender Hystereseffaktor; im Schubmodul wird keine innere Reibung beobachtet.

Die Kurven des Verlustfaktors von Glas tragen mit der Frequenz leicht fallenden Charakter; die Hystere nimmt hier offenbar mit zunehmender Belastungszeit wieder leicht zu. Für Natriumglas ergibt sich für 5000 Hz:

$$\eta_E = 7.5 \cdot 10^{-4}, \quad \eta_\mu = 8.2 \cdot 10^{-4}, \quad \eta_\lambda \approx 0. \quad (10)$$

Für Glas ist die Poissonsche Zahl im allgemeinen etwas kleiner als für Metalle, so daß wir mit Sicherheit auf einen (im Vergleich zum Verlustfaktor des Schubmoduls) kleinen Verlustfaktor des Dilatationsmoduls schließen können. Eine innere Reibung ist im untersuchten Frequenzbereich noch nicht zu erkennen.

Erstarrte Flüssigkeiten, zu denen dem inneren Aufbau nach Glas zu zählen ist, weisen demnach, was den Verlustfaktor betrifft, das typisch hystereseartige Verhalten fester Körper auf.

II. Hystereseffaktor und Struktur.

Die folgenden Betrachtungen erstrecken sich ausnahmslos auf Meßergebnisse bei tiefen Frequenzen, wo der Verlustfaktor im wesentlichen die mechanische Hysteresse, das heißt die nicht elastischen Eigenschaften des inneren Gefüges zum Ausdruck bringt. In allen nicht besonders vermerkten Fällen handelt es sich im folgenden immer um Messungen des E -Moduls (Stabschwingungen) bei 1000 Hz²³.

a) Messungen bei verschiedenen Temperaturen.

Mit zunehmender Temperatur dehnt sich jeder Körper aus; wir beobachten dann im allgemeinen eine Zunahme des Verlustfaktors und eine Abnahme des E -Moduls. Bei vielen Stoffen treten zudem beim Überschreiten bestimmter Temperaturen zusätzliche Gleitebenen in Erscheinung, so daß der Hystereseffaktor plötzlich wesentlich größer wird.

Abb. 14 zeigt drei Meßbeispiele für Molybdän, Aluminium und Magnesium²³. Bei Molybdän ändern sich E -Modul und Verlustfaktor nur langsam mit der Temperatur. Bei Aluminium treten bei Temperaturen von 600 Grad neue kristalline Gleitmöglichkeiten auf²⁴, der Hystereseffaktor wächst bei dieser Temperatur auf das 150fache seines Wertes bei Zimmertemperatur. Bei Magnesium ist dieser Sprung (auf das 160fache des Normalwertes) schon bei 225 Grad zu beobachten; bei dieser Temperatur treten zur Basisebene, die als Gleitebene fungiert, 12 weitere Gleitebenen hinzu²⁵.

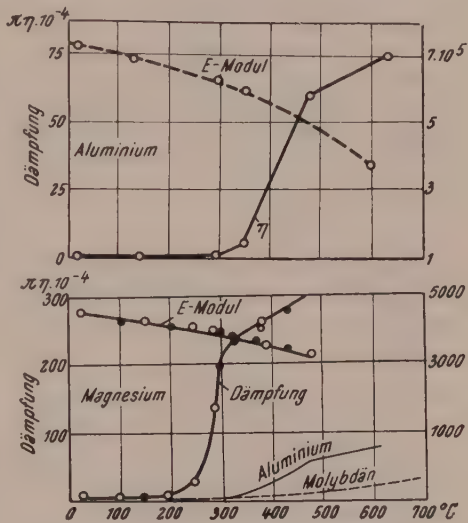


Abb. 14. Temperaturabhängigkeit des Elastizitätsmoduls und der Dämpfung von Magnesium und Aluminium (nach F. Förster und W. Köster).

²³ F. Förster und W. Köster: Elastizitätsmodul und Dämpfung in Abhängigkeit vom Werkstoffzustand. Z. Metallkunde **29**, 116 (1937).

²⁴ W. Bras und E. Schmid: Z. Physik **71**, 703 (1931).

²⁵ S. Schiebold und G. Siebel: Z. Physik **69**, 458 (1931).

b) Innere Umwandlungsprozesse.

Auch bei inneren Umwandlungen beobachten wir wesentliche Veränderungen des Hysteresefaktors und des E -Moduls. Abb. 15 (Meßergebnisse nach E. Scheil und W. Thiele²³) veranschaulicht diese Tatsache für die irreversible γ/α -Umwandlung eines Nickelstabes (22,4% Ni).

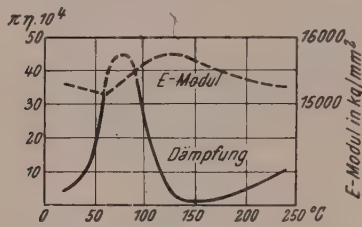


Abb. 15. Temperaturabhängigkeit des Elastizitätsmoduls und der Dämpfung von Eisen-Nickel-Stahl mit 22,42% Ni (nach E. Scheil und W. Thiele).

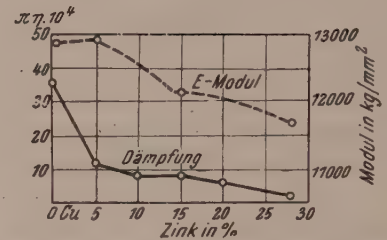


Abb. 16. Elastizitätsmodul und Dämpfung von Kupfer-Zink-Legierungen (nach F. Förster und W. Köster).

c) Legierungen.

Bei der Legierung eines Metalles mit einem anderen sinkt der Verlustfaktor zunächst meist ab, erreicht ein Minimum und steigt dann wieder an. Als Beispiel ist in Abb. 16 der E -Modul und die Dämpfung für eine Kupfer-Zink-Legierung (Messing) dargestellt²³.

Der Verlustfaktor von Eisen in Abhängigkeit vom Kohlenstoffgehalt.

Kohlenstoffarmes Eisen ist sehr weich, sein Hysteresefaktor daher groß. Mit zunehmendem Kohlenstoffgehalt fällt der Verlustfaktor ab, erreicht aber schon bei etwa 0,3% Kohlenstoffgehalt einen konstanten Grenzwert²³ (Abb. 17).

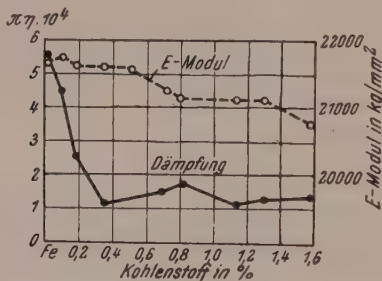


Abb. 17. Verlustfaktor des E -Moduls in Abhängigkeit vom Kohlenstoffgehalt des Eisens (nach F. Förster und W. Köster).

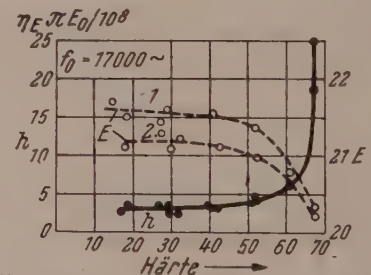


Abb. 18. Abhängigkeit des Verlustfaktors des E -Moduls von Vanadiumstahl mit Rockwellhärte (nach Wegel und Walther).

d) Der Verlustfaktor und der E -Modul in Abhängigkeit von der Rockwellhärte.

Wegel und Walther²¹ haben auch die Abhängigkeit des Verlustfaktors und des E -Moduls in Abhängigkeit von der Rockwellhärte für fünf verschiedene Stahlsorten geprüft. Die Kurven unterscheiden sich auch in quantitativer Hinsicht nur unwesentlich voneinander und zeigen alle den in Abb. 18 für Vanadiumstahl dargestellten Verlauf: Bei kleinen Härten ist die Dämpfung meist um ein geringes größer, nimmt mit zunehmender Härte zunächst ab, um oberhalb Rockwellhärten von 40 bis 50 wieder außerordentlich stark anzusteigen, im Gegensatz zum E -Modul, der mit zunehmender Rockwellhärte immer etwas absinkt.

e) Verlustfaktor und Korngröße.

Der Verlustfaktor wächst wohl meistens mit zunehmender Korngröße. Abb. 19 zeigt die Abhängigkeit der Dämpfung von der Korngröße für einen Messingstab: Die verschiedenen Korngrößen kamen durch Glühen des Stabes bei steigender Temperatur während des Zeitraumes von je einer Stunde zustande.

f) Verlustfaktor und Anlaßtemperatur.

Daß die durch den Vorgang des Ausglühens bewirkte Verringerung der Spannungen einen wesentlichen Rückgang des Hysteresefaktors bewirkt, haben wir bereits bei Stahl festgestellt. Abb. 20 veranschaulicht den Einfluß der Anlaßtemperatur für eine Eisen-Kobalt-Chrom-Legierung; die maximale Dämpfung kennzeichnet den Bereich der α/γ -Umwandlung. Die in diesem Temperaturbereich

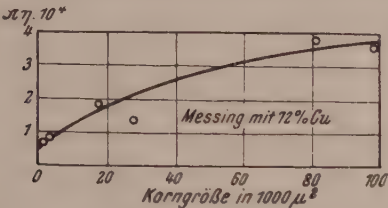


Abb. 19. Einfluß der Korngröße auf die Dämpfung (nach F. Förster und W. Köster).

gebildeten Mischkristalle bleiben auch bei der Abkühlung auf Raumtemperatur erhalten und erhöhen die Dämpfung. Ähnliche Ergebnisse fanden F. Förster und W. Köster für den Einfluß des Anlassens auf E -Modul, Härte und Verlustfaktor für eine um 50% gezogene Messingstange mit 73% Kupfer. Durch Anlassen werden hier die inneren Spannungen beseitigt und der Verlustfaktor geht auf ein Zehntel seines ursprünglichen Wertes zurück. Sobald aber die Temperatur eine gewisse Grenze überschreitet, wachsen die Kristalle und der Verlustfaktor nimmt ebenfalls stark zu. Bei Stahl geht die Dämpfung durch Anlassen leicht auf ein Dreißigstel ihres ursprünglichen Wertes zurück.

g) Härterisse, Materialfehler; innere Korrosion. Schweißstellen.

Daß Fehlstellen, Härterisse und Korrosionserscheinungen ebenfalls zu einem erhöhten Verlustfaktor führen, ist nach den vorangegangenen Betrachtungen verständlich. Auch Schweißstellen zeichnen sich durch einen außerordentlich hohen Verlustfaktor aus; geschweißte große Aluminiumbecken hatten meist eine zehnmal so hohe Dämpfung als die verwendeten Bleche.

h) Magnetische Einflüsse, interkristalline Wirbelströme usw.

Daß die magnetischen und magnetostriktiven Eigenschaften eines Stoffes auch seine innere Dämpfung wesentlich beeinflussen, ist seit langem bekannt; wie stark sich beispielsweise die Reibungsverluste durch Magnetisierung eines Nickelstabes erhöhen, geht aus Abb. 21 hervor. Erhitzt man den Stab auf den Curie-Punkt, so geht der Verlustfaktor wieder auf den ursprünglichen, dem unmagnetischen Zustand

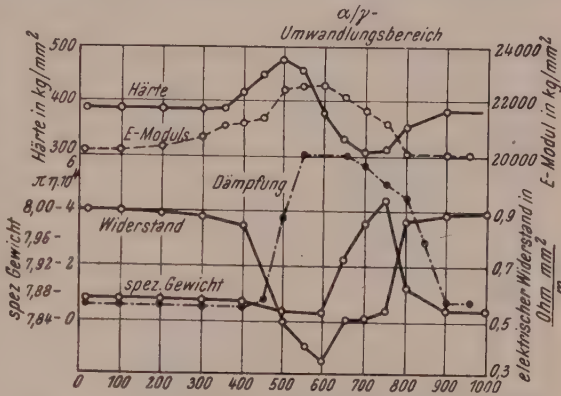


Abb. 20. Einfluß des Anlassens auf Härte, Elastizitätsmodul, Dämpfung, elektrischen Widerstand und spezifisches Gewicht einer Eisen-Kobalt-Chrom-Legierung (nach F. Förster und W. Köster).

entsprechenden Wert zurück. Auch muß mit einer gewissen Auswirkung der in den Kristalliten entstehenden Wirbelströme und einer Reihe weiterer, weniger wichtiger Einflüsse gerechnet werden.

III. Die Abhängigkeit der Materialdämpfung von der Amplitude der Schwingung und der Vorgeschichte des Materials.

Wenn man eine Materialprobe zu Schwingungen anregt, so nähert sich die Dämpfung nur allmählich einem stabilen Endwert, bzw. erreicht ihn nach etwa 2 bis 4 Millionen Schwingungen. Gewährt man dem Material eine längere Ruhepause, so nimmt die Dämpfung ebenfalls andere Werte an.

Die Dämpfung (und zwar der Hysteres- und plastische Anteil) nimmt ferner mit der Amplitude der Schwingungen zu; oberhalb der Bruchgrenze treten keine

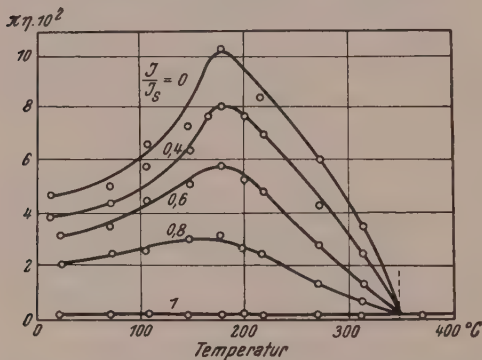


Abb. 21. Dämpfung der elastischen Schwingungen eines Nickelstabes in Abhängigkeit von der Temperatur für verschiedene Werte der relativen Magnetisierung J/J_s (nach S. Siegel und S. L. Quimby: *Physic. Rev.* **49**, 663 (1936)).

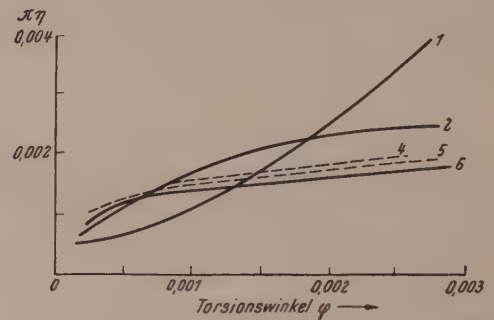


Abb. 22. Dämpfungskurven für Duraluminium; 1 und 2 jungfräuliche Kurve zweier verschiedener Stäbe, 4, 5, 6, Meßergebnis nach 30.000, 200.000 und 1 Million Lastwechsel konstanter Amplitude ($\varphi_{\max} = 0,003$) für Stab zwei.

stabilen Dämpfungswerte mehr auf. Die Kurve steigt stetig an, bis sich schließlich an der Oberfläche haarfeine Risse zeigen und das Material zu Bruch geht. Dieses unstabile Verhalten ist ein empfindliches Kriterium für die Überlastung des Stabes. Abb. 22 zeigt den Verlauf der Dämpfungskurven für Duraluminium, bzw. den Einfluß der Alterung auf die Dämpfung bei tiefen Frequenzen ($f < 100$ Hz). Die Ordinate stellt den mit π multiplizierten Verlustfaktor des Schubmoduls (Dekrement von Torsionsschwingungen), die Abszisse die Winkelamplitude der Schwingung dar. Für nähere Einzelheiten sei auf die Untersuchungen von Kortum²⁰, E. Becker und O. Föppl²⁶ verwiesen.

§ 7. Die Vorzugsstellung der Laméschen Elastizitätskonstanten.

Im Prinzip wäre es gleichgültig, welche Konstantenpaare wir für die Beschreibung des mechanischen Verhaltens elastischer Stoffe heranziehen; die in „Innere Reibung I“ in Tabellenform zusammengestellten Transformationsformeln gestatten jederzeit einen beliebigen Wechsel.

Dennoch sind vor allen möglichen Konstantenpaaren die Laméschen Konstanten λ, μ besonders ausgezeichnet, da diese nicht nur die elastischen Eigenschaften,

²⁶ E. Becker und O. Föppl: Dauerversuche zur Bestimmung der Festigkeitseigenschaften, Beziehungen zwischen Baustoffdämpfung und Verformungsgeschwindigkeit. Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens (herausgegeben vom VDI) Heft Nr. 304. Berlin: VDI-Verlag. 1928.

sondern auch die innere Struktur der Stoffe besonders deutlich widerspiegeln. Für Gase und Flüssigkeiten beispielsweise ist charakteristisch, daß der Realteil von $\bar{\mu}$, die Schubsteife, 0, und der Realteil von $\bar{\lambda}$, die Dilatationssteife, immer von 0 verschieden ist. Das Verhältnis μ_0/λ_0 kann daher als Maß für den Flüssigkeitsgrad angesehen werden; für gummiähnliche Stoffe ist $\mu_0/\lambda_0 = 0.01$ besonders klein; sie ähneln daher in ihrem mechanisch-elastischen Verhalten weitgehend den Flüssigkeiten. Nach einer der verbreiteten Theorien nimmt man tatsächlich an, daß Gummi aus einem Skelett besteht, zwischen dem die Flüssigkeit Gummi hindurchströmt. Für Blei, das ebenfalls einen flüssigkeitsähnlichen Stoff darstellt, beträgt $\mu_0/\lambda_0 = 0.1$, für Glas, seiner Struktur nach eine erstarrte Flüssigkeit, (d. h. kristallinamorph), 0.6 bis 1.4, für Stahl dagegen 1.5, für Wolfram 2, für Magnesium sogar 4.

Der Imaginärteil von μ , der die Schubreibung μ_1 darstellt, ist bei Gasen und Flüssigkeiten mit der Zähigkeitsreibung identisch, jener Reibung, die durch die gaskinetische Diffusion des Bewegungsmomentes zu Stellen anderer Deformationsgeschwindigkeit hervorgerufen wird und immer dann auftritt, wenn die Deformationsgeschwindigkeit örtlich variiert (also auch bei der allseitig gleichmäßigen Kompression!)⁶. Die Schub- oder Zähigkeitsreibung ist das Maß für den durch die Moleküle hervorgerufenen Impulstransport; in ihr kommt daher die freie Weglänge, die gaskinetische Geschwindigkeit, die Masse eines Moleküls und die Zahl der Moleküle je Volumeneinheit zum Ausdruck.

Die Dilatationsreibung beschreibt demgegenüber jenen Anteil der Reibungskräfte, der vom Schubmodul und dessen Reibungsanteil unabhängig ist. Wie wir erkannt haben, ist die Dilatationsreibung der Gase und Flüssigkeiten eine Folge ihrer nicht ideal elastischen Zusammenstöße und damit eine Folge der endlichen Ausdehnung der Atome und Moleküle, sowie ihrer inneren Schwingungen. Im Gegensatz zum realen Gas besteht das ideale Gas definitionsgemäß aus punktförmigen, ideal elastischen Elementarteilchen und kann daher keinerlei Dilatationsreibung aufweisen. Wir sind also berechtigt, den Grenzwert der Dilatationsreibung für langsame Deformationsprozesse oder tiefe Frequenzen als Maß für die Abweichung des Verhaltens eines realen Gases oder einer Flüssigkeit von dem eines idealen Gases, bzw. einer idealen Flüssigkeit zu betrachten.

Bei Gasen und Flüssigkeiten bringen die Laméschen Konstanten völlig verschiedene materielle Eigenschaften zum Ausdruck.

Vom Standpunkt der Kontinuumsmechanik sind die Laméschen Konstanten auch bei festen Körpern voneinander unabhängig; wegen der intensiven Wechselwirkung ihrer Atome müssen wir hier allerdings damit rechnen, daß sie nicht mehr voneinander unabhängige Eigenschaften der Struktur widerspiegeln und so ihre vorherrschende Stellung verlieren. Im allgemeinen dürften aber $\bar{\mu}$ und $\bar{\lambda}$ auch bei festen Körpern eindeutige Schlüsse zulassen, als die aus ihnen durch lineare Superposition abgeleiteten übrigen Konstantenpaare. Zur Stützung dieser Behauptung sei auf den Fall des Buna S zurückverwiesen, wo der Verlustfaktor des Dilatationsmoduls nahezu konstant, der des Schubmoduls dagegen stark frequenzabhängig ist. Jede Kombination beider Grundkonstanten würde in diesem Fall zu einem Verlustfaktor führen, dem der ausgeprägte Frequenzgang des Schubmoduls anhaftet, während die Tatsache, daß der Dilatationsmodul praktisch frei von innerer Reibung ist, verlorenginge.

Die Maßzahlen der inneren Reibung fester Körper.

Eine der Deformationsgeschwindigkeit proportionale Reibung kann nur als Grenzfall für sehr tiefe Frequenzen oder sehr kleine Deformationsgeschwindigkeiten bei Gasen und Flüssigkeiten beobachtet werden. Bei festen Körpern tritt eine solche

Stoff	Frequenz- bereich kHz	Schubmodul			
		μ_0 kg/cm ²	η μ	\hbar_0	r
Hartgummi	—	90·0	0·22	—	—
170 Jahre alte Fichte	0—8	—	—	—	—
transversal zur Faserrichtung					
trocken	—	—	—	—	—
feucht	—	—	—	—	—
longitudinal trocken	—	—	—	—	—
feucht	—	—	—	—	—
10 Jahre alte Fichte	0—8	—	—	—	—
transversal trocken	—	—	—	—	—
longitudinal	—	—	—	—	—
Baufichte	—	—	—	—	—
transversal zur Faserrichtung					
longitudinal	—	—	—	—	—
Tierisches Gewebe	400—4500	0	—	0	0
Natrium-Kalk-Glas	1—20	—	—	$8,2 \cdot 10^{-4}$	0
Buna S	—	76	—	0,09	$1,7 \cdot 10^{-4}$ (0,1—1)
				(falsche Hysterese)	

innere Reibung nicht einmal bei den tiefsten Frequenzen auf; hier sind die Reibungskräfte wegen der überwiegenden mechanischen Hysterese meist der Amplitude proportional. Der Begriff innere Reibung, wie er in Physik und Mechanik geprägt wurde, stellt daher nur einen sehr beschränkt realisierbaren Spezialfall dar; wir müssen ihn entweder völlig aufgeben oder entsprechend verallgemeinern. Das letzte ist offenbar vorzuziehen. Wir wollen also unter dem Begriff „innere Reibung“ alle jene Erscheinungen zusammenfassen, die zu einer irreversiblen Umwandlung mechanischer Wärme in Wärmeenergie führen, auch wenn der Vorgang, wie bei der Hysterese oder dem plastischen Fließen, nicht das geringste mit einer inneren Reibung in des Wortes eigentlicher Bedeutung zu tun hat. Wir wollen weiter, wie in § 1, c verabredet, die auf die Deformationsgeschwindigkeit, die Deformationsbeschleunigung und das Integral der Deformationsgeschwindigkeit bezogenen Verlustgrößen als Reibungsmaß r , Hysteresemaß \hbar und Fließmaß p bezeichnen, so daß untenstehende Beziehungen gelten:

$$r = \frac{\eta}{\omega} \left(= -\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right), \quad \hbar = \eta, \quad p = \omega \eta.$$

Für eine einfache Relaxationserscheinung ist bei tiefen Frequenzen

$$r_0 = \text{konst.}$$

Bei der Relaxationsfrequenz durchläuft der Verlustfaktor (das Hysteresemaß) ein Maximum; in ihrer unmittelbaren Nachbarschaft $f = f_0$ gilt:

$$\hbar_{f_0} = \text{konst.}$$

Bei hohen Frequenzen ($f > f_0$) wiederum sinkt der Verlustfaktor umgekehrt proportional der Frequenz ab; in diesem Falle nimmt das Fließmaß

$$p_\infty = \text{konst.}$$

einen konstanten Wert an.

3.

Dilatationsmodul				E-Modul			
λ_0 kg/cm ²	η_λ	h_0	r	E_0 kg/cm ²	η_E	h_0	r
$2.25 \cdot 10^{-4}$	0	0	0	$2.6 \cdot 10^{-3}$	0.02	—	—
—	—	—	—	198 000	—	—	—
—	—	—	—	—	—	$0.6 \cdot 10^{-2}$	$3.4 \cdot 10^{-6}$ (1, > 7.5)
—	—	—	—	—	—	$0.6 \cdot 10^{-2}$	$20 \cdot 10^{-6}$ (1, > 7.5)
—	—	—	—	—	—	$0.4 \cdot 10^{-2}$	$1.2 \cdot 10^{-6}$ (3, > 10)
—	—	—	—	—	—	$0.4 \cdot 10^{-2}$	$3.5 \cdot 10^{-6}$ (2, > 10)
—	—	—	—	82 300 bis	—	—	—
—	—	—	—	120 000	—	—	—
—	—	—	—	—	—	$0.8 \cdot 10^{-4}$	$2.2 \cdot 10^{-6}$ (1, > 5)
—	—	—	—	825**	—	$0.6 \cdot 10^{-4}$	11^{-6} (2, > 10)
—	—	—	—	91 500	—	—	—
—	—	—	—	—	—	$1 \cdot 10^{-2}$	$7.5 \cdot 10^{-6}$ (0.4, > 3)
—	—	—	—	—	—	$0.8 \cdot 10^{-2}$	$1.25 \cdot 10^{-6}$ (1.8, > 10)
$2.2 \cdot 10^{-4}$	—	$3 \cdot 10^{-3}$ bis 10^{-2}	0	—	—	—	—
—	0	0	0	—	—	$7.5 \cdot 10^{-4}$	0
$2.25 \cdot 10^{-4}$	0.1	0.1	0	230	—	—	—

Bei festen Körpern finden wir bei tiefen Frequenzen meist ein konstantes Hysteresemaß; die Hysteresekonstante h_0 ist daher die erste anzuführende Größe. Der Hysteresee überlagern sich oft bei höheren Frequenzen Relaxations- oder Nachwirkungseffekte, die einen Anstieg des Verlustfaktors mit der Frequenz zur Folge haben. Um die Relaxationserscheinung zu charakterisieren, ist es zweckmäßig, das Reibungsmaß als differentielle Neigung $\partial\eta/\partial f$ des Verlustfaktors für die Frequenz f anzugeben, bei der der Verlustfaktor die Hysteresekonstante um 20% übersteigt, und schließlich noch die obere Frequenzgrenze, für die die Neigung der Frequenzkurve um 20% kleiner ist. Wir schreiben also:

$$r [f_1 - f_2] = r$$

d. h. dieser Wert gilt zwischen f_1 und f_2 . Im Bedarfsfalle wird man diese Angaben durch Nennung der Verlustfaktoren für weitere Frequenzen ergänzen. Die innere Reibung des Holzes bei Transversalschwingungen z. B. kann so auf folgende Art charakterisiert werden:

E-Modul:

$$h_0 = 1.2 \cdot 10^{-2}, \quad r = 6.8 \cdot 10^{-6} \text{ (1.5 - 5 kHz),}$$

170 Jahre alte Klangfichte (Transversalschwingungen quer zur Faserrichtung);

$$h_0 = 0.4 \cdot 10^{-2}, \quad r = 1.2 \cdot 10^{-6} \text{ (3 - 10 kHz),}$$

170 Jahre alte Klangfichte (Longitudinalschwingungen).

Tab. 3 und 4 bedeuten einen ersten Versuch, die Reibungsgrößen fester Körper tabellarisch zu erfassen: Es folgen der Reihe nach der Frequenzbereich der Messung, die Schubsteife, der Verlustfaktor der Schubsteife, das Hysteresemaß und das Reibungsmaß des Schubmoduls in der eben festgesetzten Weise. Ihm schließen sich die entsprechenden Größen für den Dilatationsmodul und den E-Modul an. Da bei den meisten Stoffen nur die Verlustfaktoren des E-Moduls bekannt sind, muß der E-Modul zur Zeit noch mitgeführt werden.

Tabelle 4.

Stoff	Frequenz- bereich kHz	Schubmodul			
		$\mu_0 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$	η_μ	$\overbrace{\eta_\mu}^{h_0 \quad r}$	
Reinstaluminium.....	1—300	0·27	—	—	—
Duraluminium.....	1—600	—	—	—	—
Blei.....	—	0·08	$4 \cdot 10^{-2}$	$4 \cdot 10^{-2}$	0
Eisen, unausgeglüht.....	1—100	0·8	$7 \cdot 2 \cdot 10^{-5}$	$7 \cdot 2 \cdot 10^{-5}$	0
Eisen, ausgeglüht.....	1—100	—	$2 \cdot 6 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-5}$	$0 \cdot 12 \cdot 10^{-8}$ (3—60 kHz)
Kadmium.....	6	0·22	—	—	—
Kupfer.....	10	0·46	$2 \cdot 8 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 8 \cdot 10^{-4}$	0
Magnesium.....	10	0·19	—	—	—
Messing.....	6	0·43	—	—	—
Nickel.....	10	0·79	$3 \cdot 5 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$0 \cdot 4 \cdot 10^{-7}$ (6—8·5 kHz)
Silber.....	10	0·29	$2 \cdot 2 \cdot 10^{-4}$	—	—
Zink.....	1	0·4	—	—	—
Zinn.....	1	0·18	—	—	—

Leider sind die Meßergebnisse noch so spärlich, daß die Tabelle nur teilweise gefüllt werden kann. Vollständig würde sie einen tieferen Einblick in den elastischen Mechanismus des Stoffes vermitteln. Schon allein die Möglichkeit einer Feststellung, ob die beobachteten Verluste im Schub- oder Dilatationsmodul auftreten, ob es sich um Hysterese, um Relaxation oder allgemeine Nachwirkung handelt, rechtfertigt eine solche tabellarische Übersicht. Natürlich wird es für genauere Untersuchungen notwendig sein, die Ergebnisse auch in Kurvenform mitzuteilen.

Überblick.

Das fiktive ideal-elastische Kontinuum wird durch zwei Elastizitätskonstanten charakterisiert; die genaue Kennzeichnung des elastischen Verhaltens realer Stoffe dagegen erfordert wesentlich mehr Angaben. Schon bei langsam verlaufenden Deformationen, in Gasen und Flüssigkeiten, führt die Übertragung der Bewegung durch die Moleküle zu einer Zähigkeitsreibung, der nicht ideal-elastische Charakter der gaskinetischen Zusammenstöße zu einer Dilatationsreibung. Wenn die zeitliche Dauer der Deformationen vergleichbar wird mit der Einstelldauer des inneren Gleichgewichtes oder gar mit dem Zeitintervall aufeinanderfolgender Zusammenstöße der Moleküle treten in Gasen und Flüssigkeiten Relaxationserscheinungen auf; in festen Körpern beobachten wir eine mit innerer Reibung verknüpfte elastische Nachwirkung, die oft durch eine Überlagerung einfacher Relaxationserscheinungen hervorgerufen wird. Formal allerdings kann die elastische Nachwirkung immer durch Überlagerung eines Kontinuums solcher Relaxationserscheinungen dargestellt werden; dieser Weg mündet in einem dem klassischen Boltzmannschen ähnlichen Nachwirkungsintegral. Die nähere Betrachtung zeigt allerdings, daß auch die bezüglich der inneren Reibung ergänzte Boltzmannsche Methode nur beschränkten Spezialfällen gerecht werden kann und daß die Boltzmannsche Erinnerungsfunktion selbst im allgemeinen von der Vorgeschichte der Bewegung abhängt. Wollen wir die mit innerer Reibung verknüpfte elastische Nachwirkung streng behandeln, so müssen wir den Weg über die Fourier-Zerlegung der Bewegung wählen; dann ist die Vorgeschichte in den harmonischen Komponenten enthalten und die Erinnerungsfunktionen liegen eindeutig fest. Die unendlich vielen, das elastische Verhalten charakterisierenden Stoffkonstanten lassen sich in diesem Fall zu zwei von der Frequenz abhängigen komplexen Elastizitäts-

Metalle.

Dilatationsmodul				E-Modul			
$\lambda_0 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$	η_λ	η_λ		$E_0 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$	η_E	η_E	
		h_0	r			h_0	r
0.575	—	—	—	0.74	$7 \cdot 10^{-5}$	$7 \cdot 10^{-5}$	0
—	—	—	—	—	$3.8 \cdot 10^{-5}$	$3.8 \cdot 10^{-5}$	0
0.72	0	0	0	0.17	$3 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-2}$	0
0.94	$33 \cdot 10^{-5}$	$33 \cdot 10^{-5}$	0	2.0	$9.6 \cdot 10^{-5}$	$9.6 \cdot 10^{-5}$	0
—	$0.6 \cdot 10^{-5}$	—	—	—	$2.4 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-5}$	$0.11 \cdot 10^{-8}$ (3—20 kHz)
0.33	—	—	—	0.52	$3.5 \cdot 10^{-4}$	—	—
1.07	$11 \cdot 10^{-4}$	$11 \cdot 10^{-4}$	0	1.2	$4.5 \cdot 10^{-4}$	$4.5 \cdot 10^{-4}$	0
0.05	—	—	—	0.42	$5 \cdot 10^{-5}$	—	—
1	—	—	—	1.05	$10^{-4} \cdot 10^{-5}$	—	—
1.2	$17 \cdot 10^{-4}$	0	$1.36 \cdot 10^{-7}$	2.03	$4.7 \cdot 10^{-4}$	$1.8 \cdot 10^{-4}$	$2.4 \cdot 10^{-8}$ (7—60 kHz)
0.92	0	0	0	0.8	$1.5 \cdot 10^{-4}$	—	—
0.5	—	—	—	1	$2.5 \cdot 10^{-4}$	—	—
0.36	—	—	—	0.55	$17 \cdot 10^{-4}$	—	—

η = Verlustfaktor = $(h_0 + 20\% + r(f - f_1))$; h_0 = Hysteresemaß; r = Reibungsmaß;
 f = Frequenz.

konstanten zusammenfassen, deren Realteile Elastizitätsmodule, deren Imaginärteile Reibungen darstellen.

Neben elastischen Deformationen beobachten wir bei festen Körpern eine mechanische Hysterese und ein plastisches Fließen: Nach jeder Deformation bleibt ein Deformationsrest zurück, der im Gegensatz zur elastischen Nachwirkung auch nach unendlich langer Zeit nicht auf Null zurückgeht. Die mechanische Hysterese erweist sich als praktisch immer frequenzunabhängig und überdeckt bei den meisten Stoffen bei tiefen Frequenzen die innere Reibung. Auch diese nichtelastischen Deformationen lassen sich bei periodischen Vorgängen durch komplexe Elastizitätskonstanten streng berücksichtigen.

Die Elastizitäts- und Reibungskonstanten können durch Schallgeschwindigkeits- und Schalldämpfungsmessungen, bzw. durch Messungen von Longitudinal- und Torsionsschwingungen von Stäben sehr genau bestimmt werden. Der Frequenzgang der Verlustkonstanten gestattet wertvolle Aufschlüsse über die innere Struktur des Stoffes und sein mechanisches Verhalten. Blei beispielsweise läßt eine ausgesprochene Hysterese im Schubmodul erkennen: sein Gefüge ist gegen Schubspannungen besonders empfindlich; ähnlich liegen die Verhältnisse bei Aluminium. Für Nickel ist eine besonders kräftige Dilatationsreibung charakteristisch, die offenbar durch magnetostriktive Einflüsse bedingt ist. Nicht ausgeglühtes Eisen, das von starken inneren Spannungen durchsetzt ist, zeigt eine ausgeprägte Hysterese in Schub- und Dilatationsmodul. Hier wird also das innere Gefüge sowohl bei Schub- als auch bei Dilatationsbewegungen zersprengt. Beseitigt man die inneren Spannungen durch Ausglühen, so geht die Hysterese nahezu auf Null zurück, während sich zugleich im Schubmodul eine innere Reibung bemerkbar macht; diese Erscheinung ist für innerkristalline Wärmeströmungen charakteristisch. Sowohl bei Glas als auch bei tierischem Gewebe, die in ihren sonstigen Eigenschaften erstarrten Flüssigkeiten entsprechen, wird bezüglich ihrer Deformationsverluste das für feste Körper typische hysteresartige Verhalten beobachtet. Bei Holz äußert sich die Hysterese besonders stark für zur Faserrichtung transversale Schwingungen. Mit zunehmendem Alter wird Holz durch innere Umwandlungen homogener und die Hysterese geht zurück; nahezu

im gleichen Maß aber wächst, wie die Meßergebnisse zeigen, die bei Frequenzen oberhalb 500 Hz überhandnehmende innere Reibung, ein Ergebnis, das für den Musikinstrumentenbau von Bedeutung ist. Bei feuchtem Holz steigt die innere Reibung etwa auf das Doppelte bis Fünffache, die Hysteresis dagegen bleibt unverändert.

In groben Zügen lassen sich die Reibungsverluste fester Körper durch vier Reibungskonstanten darstellen, nämlich durch die im allgemeinen frequenzunabhängigen Hysteresis- und die frequenzabhängigen Reibungsmaße der beiden Elastizitätskonstanten.

Herrn Dr. W. Kuhl sei für zahlreiche Diskussionen und wertvolle Hinweise gelegentlich des Studiums der elastischen Nachwirkung herzlichst gedankt.

(Eingegangen am 12. Juni 1951.)

Zur Theorie des Reibungsstoßes einer Kugel gegen eine ebene Wand und gegen eine zweite Kugel¹.

Von Wilhelm Müller, München.

Mit 10 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Die Gleichungen für die im Billardspiel vorkommenden Stoßfälle werden aus einem allgemeinen Ansatz abgeleitet und die Ergebnisse an Hand von genau berechneten Diagrammen diskutiert, mit Rücksicht auf die Bedingung für das Auftreten der Haft- und Gleitreibung.

Summary. The equations for the two main cases of billiard impact are derived from a general statement, and the results are discussed by means of exactly computed diagrams, with regard to the conditions for sliding and static friction.

Résumé. Les équations pour les deux cas principaux de chocs qui se trouvent dans le jeu de billard sont dérivées d'une disposition générale et les résultats sont discutés au moyen de diagrammes exactement calculés employant les conditions pour la friction de glissement et du départ.

1. Einleitung.

Im Anschluß an die Erfahrungen des Billardspieles wollen wir uns im folgenden mit zwei elastischen Stoßerscheinungen beschäftigen: mit dem Stoß einer rollenden Kugel gegen eine vertikale rauhe Wand und dem im allgemeinen schiefen Stoß einer Kugel gegen eine andere, zunächst ruhende gleiche Kugel, jedesmal mit Berücksichtigung der Reibung zwischen den beteiligten Körpern. Um beide Fälle aus einem allgemeinen Ansatz abzuleiten, werden wir zunächst von dem Stoß zweier ungleicher Kugeln mit den Massen m_1 und m_2 und den Radien r_1 und r_2 ausgehen. Beim Übergang zu den Sonderfällen wird in erster Linie das Massenverhältnis in Frage kommen, während der Radius der schwereren Kugel nur von untergeordneter Bedeutung ist. Um die Bewegungsvorgänge in erster Annäherung übersehen zu können, ist es zunächst zweckmäßig, ebene Verhältnisse vorauszusetzen, also alle Kräfte senkrecht

¹ Vgl. G. Coriolis: *Théorie mathématique des effets du jeu de billard*. Paris 1935. — G. W. Hemming: *Billiards mathematically treated*. London 1899. — H. Résal: *Commentaire à la théorie mathématique du jeu de billard*. J. Math. pures appl. [3] 9, 65—98 (1883). — E. J. Routh: *Die Dynamik der Systeme starrer Körper*. I. Bd., S. 177 ff. Leipzig: A. Schepp. 1898. — K. v. Szily: *Ber. ungar. Akad. Wiss.*, Bd. 19, S. 283. 1904. — Wilhelm Müller: *Dynamik* (Sammlung Götschen), II. Teil, 2. Aufl., S. 62. Berlin 1951. — *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaft*, Bd. IV, 2. Teil, S. 129—135. Leipzig: G. T. Walker. 1904—35. — Geiger-Scheel: *Handbuch der Physik*, Bd. VI, S. 521 ff. Th. Pöschl. Berlin: 1928.

zur Grundebene zu vernachlässigen, so daß die Projektion auf diese Ebene als ein ausreichendes Bild der Bewegung angesehen werden kann.

2. Voraussetzungen und Problemstellung.

Die Kugel I (Mittelpunkt A) möge nach Art einer Billardkugel auf der Ebene rollen und mit der Schwerpunktgeschwindigkeit v_1 auf die Kugel II (Mittelpunkt B) treffen, und zwar so, daß die Stoßrichtung mit der zentralen oder gemeinsamen Normalen im Augenblick der Berührung den Winkel α_1 einschließt. Gleichzeitig möge sie infolge eines exzentrischen Anstoßes mittels eines Stabes (Queue) eine Drehung um den vertikalen Durchmesser mit der Winkelgeschwindigkeit ω_1 ausführen, die positiv gerechnet werden soll, wenn die Umfangsgeschwindigkeit im Berührungspunkt beider Kugeln die gleiche Richtung hat wie die tangential Komponente $v_1 \sin \alpha_1$. Im Augenblick der Berührung wirken die normale Stoßkraft H und die tangential Reibungskraft F , die für die stoßende und angestoßene Kugel entgegengesetzt gleich anzusetzen sind. Die Geschwindigkeit v_1' der ersten Kugel nach dem Stoß möge mit der Normalen den Winkel α_1' bilden, der positiv zu rechnen ist, wenn er wie bei der gewöhnlichen Reflexion auf der zu α_1 entgegengesetzten Seite der Normalen liegt. Die Drehung ω_1' möge ebenso orientiert sein wie ω_1 . Bezeichnen wir ferner die Geschwindigkeiten der anfangs ruhenden Kugel II nach dem Stoß mit v_2' , ω_2' und den Winkel zwischen v_2' und der Normalen mit α_2' , so haben wir im ganzen acht unbekannte Größen v_1' , α_1' , ω_1' , v_2' , ω_2' , α_2' , H , F , die, wie sich zeigen wird, aus den Stoßgleichungen berechnet werden können. Dabei ist die wesentliche Unterscheidung zu machen, ob es sich bei der Reibung um Gleitreibung oder Haftreibung handelt.

3. Der Fall der Gleitreibung.

Unter der Voraussetzung ebener Verhältnisse erhalten wir für jede Kugel zwei Gleichungen für die Schwerpunktbewegung in der normalen und tangentialen Richtung und eine Gleichung für den Drall jeder Kugel. Eine weitere Gleichung ergibt sich aus dem Newtonschen Gesetz, nach dem die relative Normalgeschwindigkeit der Kugeln durch den Stoß eine Umkehr und eine Verkleinerung im Verhältnis $e:1$ erfährt, wobei e die sog. Stoßziffer bedeutet. Im Falle der Gleitreibung können wir die Reibungskraft F nach Coulomb proportional mit der Stoßkraft H , also gleich $\pm fH$ setzen (Abb. 1).

Die Schwerpunktgleichungen lauten für die beiden Kugeln:

$$v_1 \cos \alpha_1 + v_1' \cos \alpha_1' = \frac{H}{m_1}, \quad (1)$$

$$v_1 \sin \alpha_1 - v_1' \sin \alpha_1' = \frac{fH}{m_1}, \quad (2)$$

$$v_2' \cos \alpha_2' = \frac{H}{m_2}, \quad (3)$$

$$v_2' \sin \alpha_2' = \frac{fH}{m_2}. \quad (4)$$

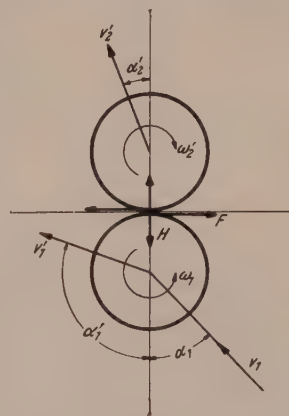


Abb. 1. Schiefer Stoß zweier Kugeln.

Der auf einen Punkt (in der Projektion) bezogene Drall jeder Kugel ist gleich der Summe des Dralles für die Schwerpunktschwerachse und dem Moment des Impulses der Schwerpunktgeschwindigkeit in bezug auf jenen Punkt. Wählen wir den Berührungspunkt der Kugeln als Bezugspunkt, so fallen die Momente der Kräfte heraus und der Drall erfährt durch den Stoß keine Änderung. Wir haben dann mit $\frac{2}{5} m r^2$ als axialem Trägheitsmoment einer Kugel mit dem Radius r , nach Division mit r_1 bzw. r_2

$$\frac{2}{5} r_1 \omega_1 - v_1 \sin \alpha_1 = \frac{2}{5} r_1 \omega_1' - v_1' \sin \alpha_1', \quad (5)$$

$$\frac{2}{5} r_2 \omega_2' - v_2' \sin \alpha_2' = 0. \quad (6)$$

Schließlich erhalten wir als Newtonsche Stoßgleichung

$$e v_1 \cos \alpha_1 = v_1' \cos \alpha_1' + v_2' \cos \alpha_2'. \quad (7)$$

Daraus berechnen sich dann folgende Werte, wenn man $\frac{m_1}{m_2} = \mu$ setzt:

$$H = m_1 v_1 \cos \alpha_1 \frac{1+e}{1+\mu}, \quad (8)$$

$$\omega_1' = \omega_1 - \frac{5}{2} f \frac{1+e}{1+\mu} \frac{v_1 \cos \alpha_1}{r_1}, \quad (9)$$

$$v_1' \cos \alpha_1' = \frac{e-\mu}{1+\mu} v_1 \cos \alpha_1, \quad (10)$$

$$v_1' \sin \alpha_1' = v_1 \sin \alpha_1 - \frac{f(1+e)}{1+\mu} v_1 \cos \alpha_1, \quad (11)$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1' = \frac{1+\mu}{e-\mu} \operatorname{tg} \alpha_1 - \frac{f(1+e)}{e-\mu}. \quad (12)$$

Die beiden Grenzfälle sind durch $\mu = 0$ und $\mu = 1$ dargestellt; im ersten Fall kann die Kugel II durch eine ebene Wand ersetzt werden, im zweiten Fall $\mu = 1$ haben wir zwei gleiche Kugeln. Es wird dann z. B. für den Stoß an der Wand mit $r_1 = r$, $v_1 = v$, $\omega_1 = \omega$,

$$\omega' = \omega - \frac{5}{2} f (1+e) \frac{v \cos \alpha}{r}, \quad (13)$$

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{1}{e} [\operatorname{tg} \alpha - f (1+e)], \quad (14)$$

für den Stoß der beiden Kugeln dagegen

$$\omega_1' = \omega_1 - \frac{5}{4} f (1+e) \frac{v_1 \cos \alpha_1}{r}, \quad (15)$$

$$v_1' \sin \alpha_1' = v_1 \sin \alpha_1 - \frac{1}{2} f (1+e) v_1 \cos \alpha_1, \quad (16a)$$

$$v_1' \cos \alpha_1' = -\frac{1-e}{2} v_1 \cos \alpha_1, \quad (16b)$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1' = \frac{1}{1-e} [f (1+e) - 2 \operatorname{tg} \alpha_1]. \quad (17)$$

Dabei ist zu bedenken, daß für $v_1 \sin \alpha_1 + r \omega_1 < 0$ das Vorzeichen von f umzukehren und für $v_1 \sin \alpha_1 + r \omega_1 = 0$, $f = 0$ zu setzen ist. Abgesehen von diesem Gesetz ist es aber bemerkenswert, daß z. B. in der Formel (14) für den Reflexionswinkel α' die Drehgeschwindigkeit ω nicht in expliziter Form auftritt, was in dem Falle der Reflexion an der Wand zu einem Widerspruch mit der Erfahrung beim Billardspiel führt, die gerade das Gegenteil zeigt, nämlich eine sehr empfindliche Abhängigkeit der Reflexion von der Drehung.

4. Fall der Haftreibung.

Die erwähnte Unstimmigkeit mit der Erfahrung kann man im Fall des Stoßes gegen die Wand dadurch beseitigen, daß man Haftreibung annimmt, das heißt voraussetzt, daß die tangentielle Geschwindigkeit längs der als rau vorausgesetzten Wand durch den Stoß vollständig abgebremst wird, was durch die Gleichung

$$v' \sin \alpha' + r \omega' = 0 \quad (18a)$$

zum Ausdruck kommt. Um auch den Fall des Stoßes beider Kugeln unter diesem Gesichtspunkt zu behandeln, vorbehaltlich einer später zu besprechenden Einschränkung, gehen wir von der Annahme aus, daß beide Kugeln nach dem Stoß die gleiche tangentielle Geschwindigkeit haben. Man wird dann im Laufe der Rechnung auf einige prägnante Unterschiede gegenüber der Gleitreibung geführt, von deren experimenteller Nachprüfung die Entscheidung der Frage abhängen wird, ob Gleiten oder Haften anzunehmen ist. Im allgemeinen Fall sind bei dieser Annahme die Gl. (2) und (4) durch die Haftbedingung

$$v_1' \sin \alpha_1' + r_1 \omega_1' = v_2' \sin \alpha_2' - r_2 \omega_2' \quad (18b)$$

zu ersetzen. Man erhält jetzt aus den Gl. (1), (3), (5), (6), (18) folgende Werte für die Hauptgrößen:

$$v_1' \sin \alpha_1' = \frac{\frac{5}{7} + \mu}{1 + \mu} v_1 \sin \alpha_1 - \frac{2}{7(1 + \mu)} r_1 \omega_1, \quad (19)$$

$$v_1' \cos \alpha_1' = \frac{e - \mu}{1 + \mu} v_1 \cos \alpha_1, \quad (20)$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1' = \frac{\frac{5}{7} + \mu}{e - \mu} \operatorname{tg} \alpha_1 - \frac{2}{7(e - \mu)} \frac{r_1 \omega_1}{v_1 \cos \alpha_1}, \quad (21)$$

$$r_1 \omega_1' = \frac{\frac{2}{7} + \mu}{1 + \mu} r_1 \omega_1 - \frac{5}{7} \frac{v_1 \sin \alpha_1}{1 + \mu}, \quad (22)$$

$$v_2' \sin \alpha_2' = \frac{2\mu}{7(1 + \mu)} (v_1 \sin \alpha_1 + r_1 \omega_1), \quad (23)$$

$$v_2' \cos \alpha_2' = \frac{\mu(1 + e)}{1 + \mu} v_1 \cos \alpha, \quad (24)$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2' = \frac{2}{7(1 + e)} \frac{\sin \alpha_1 + \frac{r_1 \omega_1}{v_1}}{\cos \alpha_1}. \quad (25)$$

Im Falle des Wandstoßes ($\mu = 0$) wird also z. B.

$$\omega' = \frac{2}{7} \omega - \frac{5}{7} \frac{v \sin \alpha}{r}, \quad (26)$$

$$v'^2 = \left(\frac{5}{7} v \sin \alpha - \frac{2}{7} r \omega \right)^2 + e^2 v^2 \cos^2 \alpha, \quad (27)$$

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{1}{e} \left(\frac{5}{7} \operatorname{tg} \alpha - \frac{2}{7} \frac{r \omega}{v \cos \alpha} \right). \quad (28)$$

Im Falle des Stoßes der Kugel I auf die gleichgroße Kugel II ($\mu = 1$) wird dagegen

$$r \omega_1' = \frac{1}{14} (9 r \omega_1 - 5 v_1 \sin \alpha_1), \quad (29)$$

$$v_1' \sin \alpha_1' = \frac{6}{7} v_1 \sin \alpha_1 - \frac{1}{7} r \omega_1, \quad (30a)$$

$$v_1' \cos \alpha_1' = -\frac{1 - e}{2} v_1 \cos \alpha_1, \quad (30b)$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1' = \frac{2}{7(1 - e)} \left(\frac{r \omega_1}{v_1 \cos \alpha_1} - 6 \operatorname{tg} \alpha_1 \right). \quad (31)$$

Bevor wir einige wichtige Folgerungen, besonders auch für das Kriterium der Haftreibung entwickeln, wollen wir die Ergebnisse für den Fall des Wandstoßes genauer diskutieren.

5. Die Reflexion der Kugel an der Wand.

Die Gl. (26) zeigt, daß die Geschwindigkeit ω' nicht von der Normalkomponente der Aufprallgeschwindigkeit abhängt, wie im Falle der Gleitreibung, sondern von der tangentialen Komponente $v \sin \alpha$. Ferner tritt in dem Ausdruck für $\tan \alpha'$ die Winkelgeschwindigkeit ω bzw. das Verhältnis $r\omega : v$ als wesentliche abhängige Veränderliche auf, ganz im Sinne der Erfahrung. Es kann also durch eine entsprechende Größe der Rotation, das heißt für $\omega > \frac{5}{2} \frac{v \sin \alpha}{r}$ erreicht werden, daß der Winkel α' negativ wird, daß man also, wie jeder Billardspieler weiß, durch einen geeigneten „Effetstoß“ mit „Vorbande“, das heißt nach Reflexion an der Bande einen zweiten Ball treffen kann, der auf der zu dem Winkel α gehörenden Seite der Normalen gelegen ist. Wenn $\omega = 0$ wird, erhält man zwar zunächst keine exakte Gleichheit von α und α' . Da aber $5:7e$ wegen $e < 1$ von der Einheit sich nicht wesentlich unterscheidet, so wird in

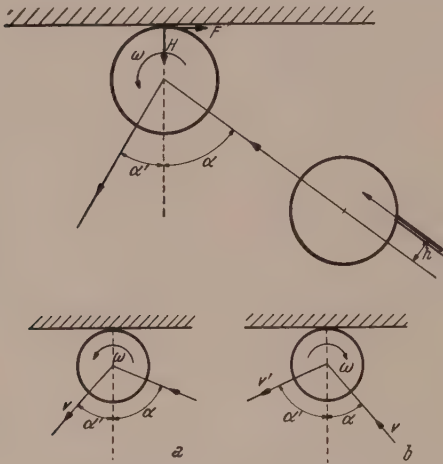
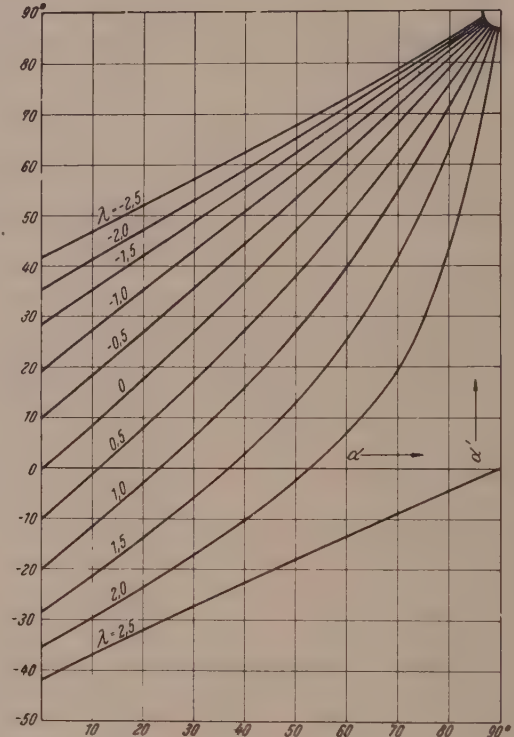


Abb. 2. Wandstoß einer Kugel.

Abb. 3. Diagramm für die Reflexionswinkel beim Stoß einer Kugel an der Wand ($e = 0,8$).

diesem Falle die Abweichung des Einfallswinkels und Reflexionswinkels kaum praktisch ins Gewicht fallen, zumal da es sich, jedenfalls im Billardspiel, nicht darum handelt, einen zweiten Ball gerade zentral, sondern nur darum, ihn überhaupt, wenn auch nur streifend, zu treffen.

Die Gl. (27) für den \tan des Rückprallwinkels läßt nun eine sehr interessante Diskussion zu, die meines Wissens bisher nicht gegeben wurde. Wir werden dabei vor allem die Abhängigkeit von dem Verhältnis $\lambda = \frac{r\omega}{v}$ ins Auge fassen, das wir kurz als „Drehwert“ bezeichnen können.

In der Abb. 2 haben wir die Reflexionswinkel α' in Abhängigkeit von α für verschiedene Drehwerte λ , und zwar für den Stoßkoeffizienten $e = 0,8$ dargestellt. Man kann daraus alle Möglichkeiten der Reflexion einer Kugel an der Wand übersehen, z. B. auch die reinen „Rückzieher“ ($\alpha' = -\alpha$), für die man die zugehörigen Drehwerte erhält, wenn man vom Ursprung unter -45° eine Gerade zieht und mit den Kurven der Schaar zum Schnitt bringt.

Alle Kurven haben nun den Punkt $\alpha = \alpha' = 90^\circ$ gemeinsam, bis auf die ausgezeichnete Grenzkurve $\lambda = 2.5$, die, wie man leicht aus der Auswertung des zunächst unbestimmt erscheinenden Ausdrucks

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{5}{7} \frac{\sin \alpha - 1}{\cos \alpha}$$

erkennt, in dem Punkt $\alpha = 90^\circ$, $\alpha' = 0$ endigt. Merkwürdigerweise hat nun der Fall $\lambda = 2.5$ auch die Bedeutung eines mechanischen Grenzfalles. Schreibt man nämlich die Gleichungen für den Anstoß der Kugel durch das Queue an und setzt einen exzentrischen Stoß mit der Exzentrizität h , das heißt dem Abstand h des Kugelmittelpunktes von der Queue-Linie voraus, so hat man

$$m v = H, \quad (32a)$$

$$\frac{2}{5} m r^2 \omega = \pm H \cdot h. \quad (32b)$$

Durch Division ergibt sich

$$\frac{2}{5} \frac{r \omega}{v} = \pm \frac{h}{r} \quad \text{oder} \quad \frac{r \omega}{v} = \lambda = \pm \frac{5}{2} \frac{h}{r}. \quad (33)$$

Man sieht daraus, daß der nicht mehr erreichbare Wert von $h = r$ dem idealen Grenzwert $\lambda = \pm 2.5$ entspricht. Dabei ist natürlich vorausgesetzt, daß die Geschwindigkeiten v und $r \omega$ bis zur Erreichung der Bande keine wesentliche oder doch nur verhältnismäßige Verminderung erfahren. Insbesondere ist der Wert $\lambda = +2.5$ dadurch ausgezeichnet, daß er den größten negativen Reflexionswinkel α' liefert. Aus dem Diagramm ist z. B. zu entnehmen, daß bei diesem Drehwert zu einem Winkel $\alpha = 0$ der Reflexionswinkel $\alpha' = -42^\circ$ oder zu $\alpha = 10^\circ$ ein Reflexionswinkel $\alpha' \sim 30^\circ$ gehört.

Die weitere Diskussion ergibt folgendes: Um die Neigung in dem allen regulären Kurven der Schaar mit $\lambda < 2.5$ gemeinsamen Punkt $\alpha = \alpha' = 90^\circ$ zu finden, hat man den Grenzwert

$$\lim_{\alpha = \alpha' = \frac{\pi}{2}} \frac{d\alpha'}{d\alpha} = \frac{1}{e} \frac{\cos^2 \alpha'}{\cos^2 \alpha} \left(\frac{5}{7} - \frac{2}{7} \lambda \sin \alpha \right) \quad (\lambda < 2.5)$$

zu ermitteln. Dabei ist

$$\lim_{\alpha = \alpha' = \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \alpha'}{\cos^2 \alpha} = \lim_{\alpha = \alpha' = \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha'} \right).$$

Da nun

$$\lim_{\alpha = \frac{\pi}{2}} \frac{d \operatorname{tg} \alpha'}{d \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{e} \left(\frac{5}{7} - \frac{2}{7} \lambda \sin \alpha \right) = \frac{1}{e} \left(\frac{5}{7} - \frac{2}{7} \lambda \right),$$

so wird

$$\lim_{\alpha = \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha'} = \left(\frac{7e}{5 - 2\lambda} \right)^2$$

und somit

$$\left(\frac{d\alpha'}{d\alpha} \right)_{\alpha = \alpha' = \frac{\pi}{2}} = \frac{7e}{5 - 2\lambda}. \quad (34)$$

Für $\lambda = 2$ wird z. B. $\frac{d\alpha'}{d\alpha} = 7e$. In dem singulären Fall $\lambda = \frac{5}{2}$ haben wir dagegen für $\alpha = 90^\circ$, $\alpha' = 0$

$$\frac{d\alpha'}{d\alpha} = \lim_{\alpha = \frac{\pi}{2}} \left[\frac{5(1 - \sin \alpha)}{7e \cos^2 \alpha} \right]_{\alpha = \frac{\pi}{2}} = \frac{5}{14e}. \quad (35)$$

Die ausgezeichnete Kurve $\lambda = \frac{5}{2}$ verläuft fast geradlinig vom Punkt $\alpha = 0$; $\operatorname{arc} \operatorname{tg} \alpha' = -\frac{5}{7e}$ bis in den Punkt $\alpha = 90^\circ$, $\alpha' = 0$ mit einer im Endpunkt erreichten Tangentenneigung $\frac{5}{14e}$.

6. Haftbedingung im Fall des Zweikugelstoßes.

Da beim Stoß zweier Kugeln der Reibungskoeffizient sehr klein, etwa von der Größenordnung $f = 0.04$ ist, müssen wir zunächst die Bedingung für den Eintritt der Haftreibung ermitteln. Aus der Beziehung

$$\frac{F}{H} = \operatorname{tg} \alpha_2'.$$

Aus der für die Haftreibung gültigen Ungleichung

$$F \leq f H \quad (36)$$

ergibt sich, daß Gleit- oder Haftreibung eintritt, je nachdem

$$f \lesseqgtr \frac{2}{7(1+e)} \left| \frac{\lambda + \sin \alpha_1}{\cos \alpha_1} \right| \quad (37)$$

ist. Man kann daher die Grenze zwischen beiden Reibungsfällen sehr übersichtlich durch die Kurven

$$\lambda + \sin \alpha_1 = \pm \frac{7(1+e)}{2} f \cos \alpha_1 \quad (38)$$

darstellen, die in der Abb. 4 für die Zahlenwerte $e = 0.9$, $f = 0.04$ gezeichnet sind. Man erhält zwei Kurvenzweige, die in den Punkten $\alpha_1 = 0$, $\lambda = \pm 0.266$ beginnen und in dem Punkt $\alpha_1 = 90^\circ$, $\lambda = -1$ zusammenlaufen, und es ist leicht einzusehen, daß das von den beiden Zweigen eingeschlossene Gebiet die Winkel α_1 und die Drehwerte λ liefert, bei denen Haftreibung eintritt, während das äußere Gebiet die Wertepaare α_1 , λ mit Gleitreibung umfaßt. Für ein gegebenes λ kann man also den Winkelbereich der Haftreibung dadurch ermitteln, daß man eine Parallele im Abstand λ zur Abszissenachse (α_1 -Achse) zieht und die Schnittpunkte mit den beiden Kurvenzweigen (38) feststellt. Man sieht dann, daß z. B. bei $\lambda = 0$ von $\alpha_1 = 0$ bis 15° mit Haften, bei Winkeln $\alpha_1 > 15^\circ$ mit Gleiten zu rechnen ist. Für $\lambda = -0.5$ reicht das Haftgebiet von $\alpha_1 = 14^\circ$ bis $\sim 44^\circ$, für $\lambda = -1$ von $\alpha_1 = 60^\circ$ bis 90° . Für $\lambda > 0.266$ und $\lambda < -1.035$ findet bei jedem Drehwert und jedem Winkel α_1 Gleiten statt.

Ein wesentlicher Unterschied zwischen beiden Reibungsarten besteht ferner darin, daß im Falle der Gleitreibung die Abweichung der Geschwindigkeitsrichtung der zweiten Kugel gegen die gemeinsame Normale konstant ausfällt: $\operatorname{tg} \alpha_2' = \pm f$, wenn $v_1 \sin \alpha_1 + r \omega_1 \leq 0$ ist, während im Falle der Haftreibung z. B. für $\lambda = 0$

$$\operatorname{tg} \alpha_2' = \frac{2}{7(1+e)} \operatorname{tg} \alpha_1 \quad (39)$$

wird, der Winkel α_2' also wesentlich vom Winkel α_1 abhängt. Diese Folgerung könnte dazu dienen, experimentell die Grenzen für die Gültigkeit des Gleit- und Haftgesetzes zu bestimmen.

7. Das Reflexionsgesetz für den Stoß zweier Kugeln

unterscheidet sich sehr wesentlich von dem Gesetz für die Reflexion an der ebenen, festen und rauhen Wand. Die Gl. (15) und (29) in Verbindung mit (16b) und (30b) zeigen folgendes: Für $e < 1$ ist die Normalkomponente $v_1' \cos \alpha_1'$ immer negativ, das heißt die Kugel I bewegt sich nach dem Stoß, wenn auch mit kleiner Normalgeschwindigkeit auf die andere Seite der gemeinsamen Tangente. Nur im Grenzfall

$e = 1$ wird die Normalkomponente gleich Null, und für $\alpha_1 = 0$ gibt die Kugel I ihre ganze Energie an die Kugel II ab und bleibt selbst in Ruhe. Im Falle $e < 1$ bleibt stets eine, wenn auch kleine Komponente in der normalen Richtung übrig. Was die weitere Abhängigkeit der Winkel α_1' und α_1 angeht (vgl. Abb. 5), so erkennt man, daß bei kleinen Winkeln der Wert des Reflexionswinkels um 180 herum liegt, wenn man die Winkel von der Normalen aus im positiven Sinne zählt (Bereich der „Nachläufer“). Genauer gesagt: Wenn $\tan \alpha_1'$ negativ ist, so bewegt sich die Kugel I bei der gegebenen Orientierung (Abb. 5) nach links, α_1' ist < 180 , ist dagegen

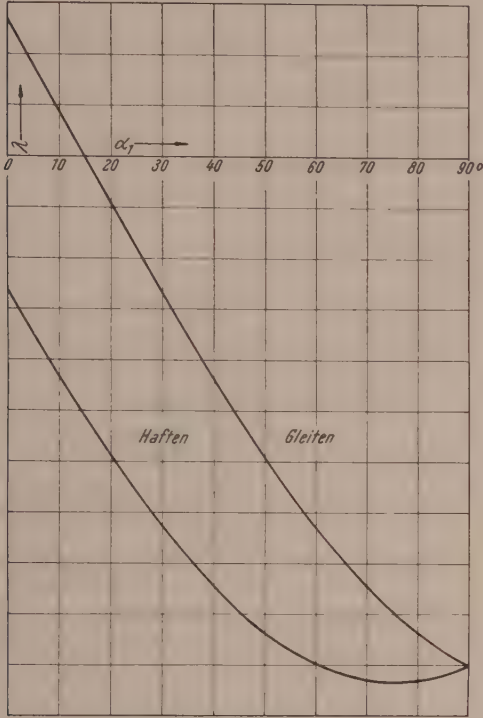


Abb. 4. Diagramm für die Haft- und Gleitreibung ($e = 0,9$; $f = 0,04$).

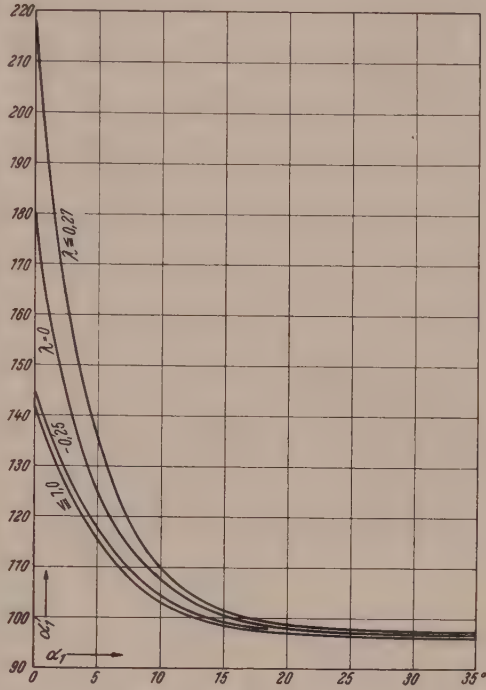


Abb. 5. Reflexionswinkel α_1' beim Stoß zweier Kugeln ($e = 0,9$; $f = 0,04$).

$\tan \alpha_1' > 0$, so bewegt sich die Kugel I nach der rechten Seite der Normalen und der Winkel α_1' ist $> 180^\circ$. Bei Berücksichtigung des Diagramms Abb. 4 findet man, daß die Kurven für die α_1' etwa dem Gebiet zwischen $\lambda = 0,27$ und $\lambda = 1$ angehören. Die Reflexionswinkel α_1' nähern sich aber mit wachsenden Winkeln α_1 sehr schnell dem rechten Winkel. Für $\alpha_1 > 30^\circ$, insbesondere aber für $e \sim 1$ bewegt sich die Kugel I nach dem Zusammenstoß mit II so, als ob sie auf der gemeinsamen vertikalen Tangentialebene bleiben würde („Schneiden“ des Balles II). Für größere Winkel α_1 oder bei Annäherung an den ideal-elastischen Stoß kann jedenfalls mit einem rechten Winkel α_1' gerechnet werden, und es dürfte nun interessant sein, unter dieser einfachen Annahme die weiteren geometrischen Konsequenzen ins Auge zu fassen, die sich daraus ableiten lassen.

8. Geometrie des Drei-Kugel-Stoßes für $e = 1$.

Man kann insbesondere bei gegebener Lage der drei Billardkugeln I, II, III mit den Mittelpunkten A , B , C nach der Bedingung dafür fragen, daß die in Bewegung versetzte Kugel I beide Kugeln II und III trifft. Wir nehmen etwa $AB = d_1$, $BC = d_2$

und der Winkel $ABC = \sigma (> 90^\circ)$ gegeben seien. Dann läßt sich eine einfache ebene Konstruktion für die Stoßrichtung und für den Berührungspunkt A' der Kugel I mit II angeben, wenn etwa zunächst verlangt wird, daß I nach der Reflexion an II die Kugel III zentral treffen soll. Da $BA'C$ ein rechtwinkliges Dreieck ist, so ergibt sich A' als Schnitt des Halbkreises über BC mit dem zu II konzentrischen Kreis um B mit dem Radius $2r$. Dann bildet AA' mit der Normalen den Winkel α_1 und BAA' ist der Winkel β , unter dem der Anstoß der Kugel I gegen die Normale AB zu erfolgen hat, damit III zentral getroffen wird.

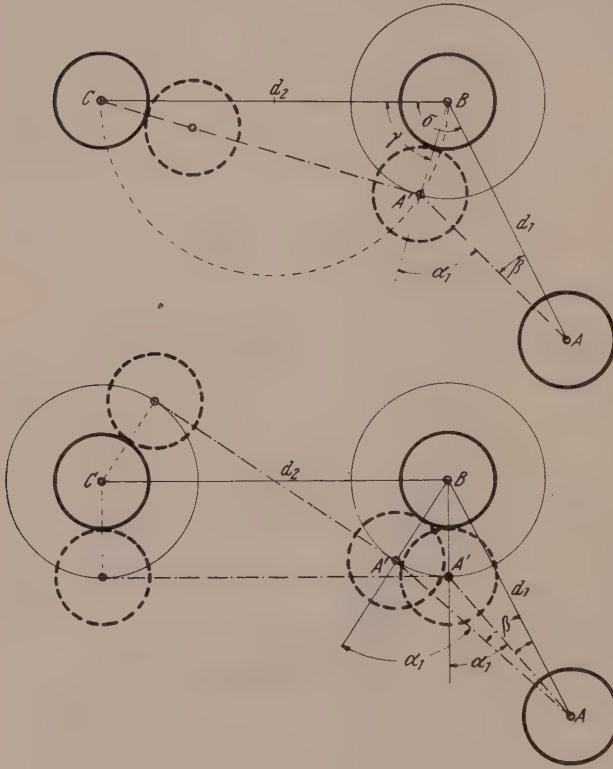


Abb. 6. Geometrie des Dreikugelstoßes ($e = 1$).

des stumpfen Winkels σ und den Kreis K_{III}' einmal auf der einen, das andere Mal auf der Gegenseite berühren (Abb. 6). Die Berührungspunkte auf dem Kreis K_{II}' sind dann gleichzeitig die beiden Lagen des Mittelpunktes der Kugel I im Augenblick der Berührung mit II. Im Fall der inneren Tangente der beiden Kreise hat man, wenn der Winkel $CBA' = \delta$ gesetzt wird,

$$\cos \delta = \frac{4r}{d_2},$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\sin(\sigma - \delta)}{\cos(\sigma - \delta) - k_1}. \quad (41)$$

Im Fall der äußeren Tangente, die der Zentralen BC parallel ist, wird der Winkel $CBA' = 90^\circ$, also

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\cos \sigma}{k_1 - \sin \sigma}. \quad (42)$$

Damit die Kugel I nach dem Stoß mit II die Kugel III trifft, muß also

$$\frac{\cos \sigma}{k_1 - \sin \sigma} < \operatorname{tg} \alpha_1 < \frac{\sin(\sigma - \delta)}{\cos(\sigma - \delta) - k_1} \quad (43)$$

Der Winkel α_1 kann auch rechnerisch leicht ermittelt werden. Bezeichnen wir den Winkel CBA' mit γ , so wird $\cos \gamma = \frac{2r}{d_2}$, ferner ergibt sich

$$\frac{\sin(\alpha_1 - \sigma + \gamma)}{\sin \alpha_1} = \frac{2r}{d_1} = k_1 \quad \text{oder}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\sin(\sigma - \gamma)}{\cos(\sigma - \gamma) - k_1}. \quad (40)$$

Den Winkel β zwischen der Zentralen AB und der Stoßrichtung findet man dann aus

$$\sin \beta = k_1 \sin \alpha_1.$$

Um die Berührungspunkte für die äußersten Grenzlagen zu ermitteln, bei denen die Kugel I nach dem Stoß an II die Kugel III gerade noch berühren, zeichnet man um B und C die konzentrischen Kreise K_{II}' und K_{III}' mit den doppelten Radien und zieht die gemeinsamen inneren und äußeren Tangenten, die den Kreis K_{II}' unten, das heißt im Innern

sein. Dabei ist vorausgesetzt, daß die Verbindungslinie AA' den Kreis K_{II}' nicht noch einmal zwischen A und A' schneidet.

9. Energieverlust beim Stoß an der Wand.

Wenn wir die kinetische Energie vor und nach dem Stoß mit E und E' bezeichnen, so wird

$$E = \frac{1}{2} m v^2 \left(1 + \frac{2}{5} \lambda^2 \right).$$

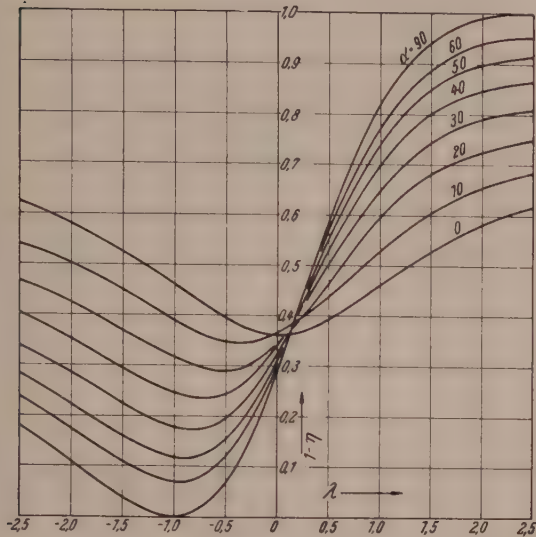


Abb. 7.
Energieverlust beim Wandstoß ($e = 0,8$).

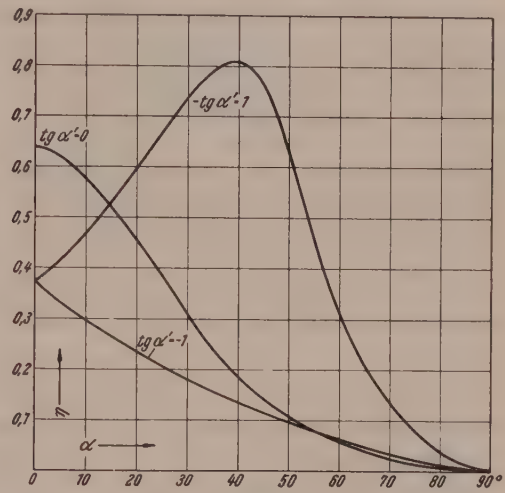


Abb. 8. Energieverhältnis beim Wandstoß für verschiedene Werte von $\tan \alpha'$.

Nach Benutzung von (26) und (27) erhält man

$$E' = \frac{1}{2} m v'^2 + \frac{1}{5} m r^2 \omega'^2 = \frac{1}{2} m v^2 \left[e^2 \cos^2 \alpha + \frac{5}{7} \left(\sin \alpha - \frac{2}{5} \lambda \right)^2 \right].$$

Daher für das Energieverhältnis

$$\eta = \frac{E'}{E} = \frac{e^2 \cos^2 \alpha + \frac{5}{7} \left(\sin \alpha - \frac{2}{5} \lambda \right)^2}{1 + \frac{2}{5} \lambda^2}. \quad (44)$$

Der spezifische Energieverlust wird also

$$\frac{\Delta E}{E} = 1 - \eta = \frac{(1 - e^2) \cos^2 \alpha + \frac{2}{7} (\lambda + \sin \alpha)^2}{1 + \frac{2}{5} \lambda^2}. \quad (45)$$

Der Verlauf der für $e = 0,8$ gezeichneten Kurven (Abb. 7) in Abhängigkeit von λ im Bereich $-2,5 < \lambda < 2,5$ für verschiedene Werte von α zeigt ein mit der Erfahrung durchaus übereinstimmendes Gesetz. Der Energieverlust ist im Gebiet der positiven λ wesentlich größer als für negative λ , das heißt ausgehend von dem Fall des drehungs-freien Stoßes fällt der Energieverlust mit wachsenden negativen Werten von λ , während er bei zunehmender positiver Rotation stark ansteigt und für $\alpha = 90^\circ$ sogar den Wert 1 erreicht, der natürlich nur eine theoretische Bedeutung hat, weil $\alpha = 90^\circ$ nicht mehr realisierbar ist. Tatsächlich zeichnet sich praktisch der Stoß $\lambda > 0$ dadurch aus, daß man, wie z. B. beim Rückzieher, große Energie aufwenden muß, damit der Ball nach dem Rückstoß noch etwa dieselbe Bewegungsenergie und Reich-

weite besitzt wie im Falle der negativen λ , wo durch eine leichte Energieaufwendung eine relativ ungeschwächte Wirkung erzielt werden kann, der Ball also noch genügend Energie besitzt, um nach dem Stoß einen längeren Weg zurückzulegen und mehrere Reflexionen an der Berandung auszuführen.

Schließlich kann man auch das Verhältnis der Energien E und E' durch Benutzung der Formeln (26) und (27) durch die Winkel α und α' darstellen. Man erhält dann den Ausdruck

$$\eta = \frac{E'}{E} = \frac{e^2 \cos^2 \alpha (10 + 14 \operatorname{tg}^2 \alpha')}{10 + (5 \sin \alpha - 7 e \cos \alpha \operatorname{tg} \alpha')^2} \quad (46)$$

aus dem man sofort erkennt, daß bei negativen Werten von α' eine Verkleinerung von η , also eine Vergrößerung des Energieverlustes eintritt. Wir haben uns darauf beschränkt, den Verlauf von η für $\operatorname{tg} \alpha' = 0$ und ± 1 in Abhängigkeit von α wiederzugeben. Man sieht, daß die Kurven von dem für $\pm \operatorname{tg} \alpha'$ gemeinsamen Ausgangspunkt $\eta(0)$ für positive Werte von $\operatorname{tg} \alpha'$ bis zu einem relativ hohen Maximum ansteigen, um dann bis $\alpha = 90^\circ$ auf Null abzusinken, während sie für negative α' mit wachsendem α von vornherein stetig abfallen bis zum Grenzwert Null bei $\alpha = 90^\circ$. Wie man leicht feststellt, wird für das Maximum von η

$$\operatorname{tg} \alpha = e \operatorname{tg} \alpha' \quad (47)$$

und daraus berechnet sich dann der Wert des Maximums zu

$$\eta_{\max} = \frac{e^2 (5 + 7 \operatorname{tg}^2 \alpha')}{5 + 7 e^2 \operatorname{tg}^2 \alpha'}. \quad (48)$$

Man bestätigt auch leicht durch Gl. (28), daß dieses Maximum dem Verschwinden der Tangentialkomponente der Aufprallgeschwindigkeit, also der Gleichung $\lambda + \sin \alpha = 0$ entspricht. Für $\alpha = \alpha' = 0$ hat man z. B. $\eta_{\max} = 0.64$, für $\operatorname{tg} \alpha' = 1$ wird $\eta_{\max} = 0.81$ und $\alpha = 38.7^\circ$.

10. Energieverlust beim Stoß zweier Kugeln.

In diesem Fall setzt sich die Energie nach dem Stoß aus dem Betrag E_1' , der Energie der Kugel I und der Energie E_2' der Kugel II nach dem Stoß zusammen. Wenn man die oben berechneten Werte von $v_1' \omega_1'$, $v_2' \omega_2'$ benutzt, erhält man ohne Schwierigkeiten:

a) im Falle des Gleitens

$$1 - \eta = \frac{\frac{1}{2} (1 - e^2) \cos^2 \alpha_1 + \frac{1}{2} \left[2 f (1 + e) \cos \alpha_1 (\lambda + \sin \alpha_1) - \frac{7}{2} f^2 (1 + e)^2 \cos^2 \alpha_1 \right]}{1 + \frac{2}{5} \lambda^2}; \quad (49)$$

b) im Falle des Haftens

$$1 - \eta = \frac{\frac{1}{2} (1 - e^2) \cos^2 \alpha_1 + \frac{1}{7} (\lambda + \sin \alpha_1)^2}{1 + \frac{2}{5} \lambda^2}. \quad (50)$$

Dabei ist zu beachten, daß im ersten Ausdruck $f \cos \alpha_1 (\lambda + \sin \alpha_1)$ stets $>$ ist, da für negative Werte von $\lambda + \sin \alpha_1$ auch f das Vorzeichen wechselt und für $\lambda + \sin \alpha_1 = 0$ auch f verschwindet.

$$\frac{7}{2} f^2 (1 + e)^2 \cos^2 \alpha_1 < f (1 + e) \cos \alpha_1 (\lambda + \sin \alpha_1)$$

ist, so ergibt sich, daß

$$1 - \eta < \frac{(1 - e^2) \cos^2 \alpha_1 + f (1 + e) \cos \alpha_1 (\lambda + \sin \alpha_1)}{2 \left(1 + \frac{2}{5} \lambda^2 \right)},$$

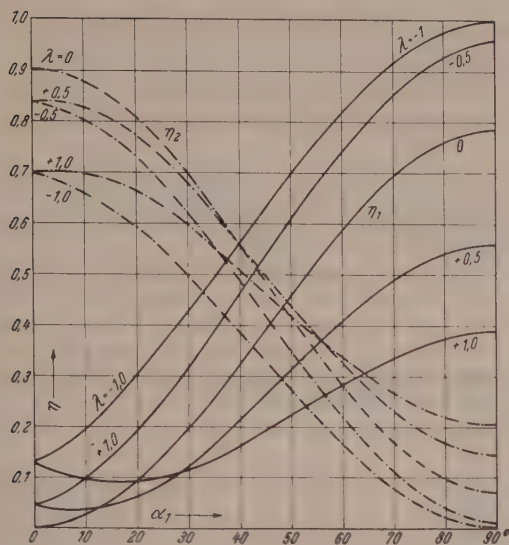


Abb. 9. Energieverhältnisse η_1 und η_2 beim Zweikugelstoß mit Haftreibung ($e = 0,9$; $f = 0,04$).

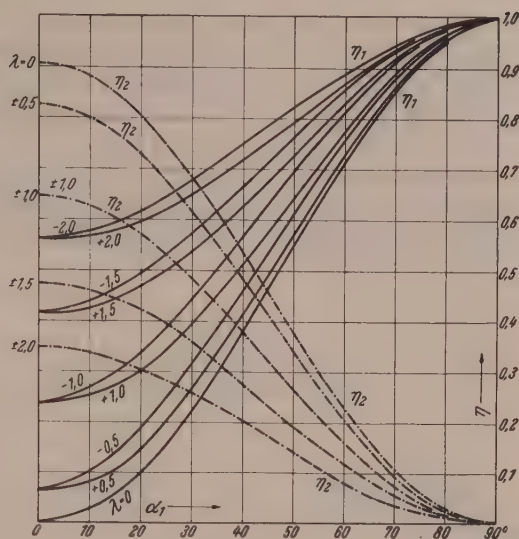


Abb. 10. Energieverhältnisse η_1 und η_2 beim Zweikugelstoß mit Gleitreibung ($e = 0,9$; $f = 0,04$).

also auch kleiner als Eins ist, wie die Rechnung bestätigt. In beiden Fällen zeigt sich, daß der Energieverlust, wenn man von der Änderung von e absieht, halb so groß ist als beim Stoß gegen die Bande.

Für die Verteilung der Energie auf die beiden Kugeln I und II nach dem Stoß erhalten wir durch eine einfache Rechnung:

a) beim Gleiten

$$\eta_1 = 1 - \frac{\left[1 - \frac{(1-e)^2}{4} - \frac{7}{2} f^2 \frac{(1+e)^2}{4}\right] \cos^2 \alpha_1 + f(1+e) \cos \alpha_1 (\lambda + \sin \alpha_1)}{1 + \frac{2}{5} \lambda^2}, \quad (51)$$

$$\eta_2 = \frac{\frac{1}{4} (1+e)^2 \left(1 + \frac{7}{2} f^2\right) \cos^2 \alpha_1}{1 + \frac{2}{5} \lambda^2}; \quad (52)$$

b) beim Haften

$$\eta_1 = 1 - \frac{\frac{3}{14} (\lambda + \sin \alpha_1)^2 + \frac{1}{4} (1+e) (3-e) \cos^2 \alpha_1}{1 + \frac{2}{5} \lambda^2}, \quad (53)$$

$$\eta_2 = \frac{\frac{1}{14} (\lambda + \sin \alpha_1)^2 + \frac{1}{4} (1+e)^2 \cos^2 \alpha_1}{1 + \frac{2}{5} \lambda^2}. \quad (54)$$

Wir haben die Schaar der Kurven η_1 und η_2 für die Grundwerte $e = 0.9$, $f = 0.04$ in Abhängigkeit von α_1 für verschiedene Drehwerte veranschaulicht. Man erkennt aus den Diagrammen, daß das Energieverhältnis η_1 für die Kugel I für kleine Winkel α_1 nur kleine Beträge aufweist, worauf bereits hingewiesen wurde und daß η_1 mit wachsendem Winkel α_1 ansteigt. Andererseits ist das Energieverhältnis η_2 der zweiten Kugel bei kleinen Winkeln α_1 groß und fällt mit wachsendem α_1 etwa im Sinne der cos-Kurve. Es folgt daraus z. B., daß bei kleinem α_1 die Kugel II mit einer Geschwindigkeit von

der Größenordnung der Geschwindigkeit v_1 der stoßenden Kugel fortgestoßen wird, während die Kugel I mit stark verminderter Energie der Kugel II nachläuft. Bei mittleren Winkeln $\alpha_1 \sim 40$ bis 50° verteilt sich die Energie η etwa zu gleichen Teilen auf beide Kugeln. Dafür aber weichen die Richtungen der Geschwindigkeiten v_1' und v_2' stark voneinander ab.

Wenn man auf die Haft- bzw. Gleitbedingung Rücksicht nimmt, erhalten die Energiekurven, wie übrigens auch die anderen Diagramme einen unstetigen Verlauf, der aus den gegebenen Unterlagen leicht konstruiert werden kann.

(Eingegangen am 6. November 1951.)

Ein Problem verketteter Wahrscheinlichkeiten.

Von H. Radek, Wien.

Zusammenfassung. Diese Abhandlung beinhaltet eine Studie über ein Problem verketteter Wahrscheinlichkeiten, die von Markoff, Fréchet und anderen behandelt wurden. Die Matrix der hier betrachteten Übergangswahrscheinlichkeiten ist dadurch charakterisiert, daß oberhalb der Hauptdiagonale alle Elemente Null sind. Im diskontinuierlichen Fall führt das Problem zur Potenzierung einer Matrix, dessen Lösung auf einer Transformation dieser Matrix in eine ähnliche Diagonalmatrix oder in eine ähnliche Jordansche Normalform beruht. Im kontinuierlichen Fall besteht die Lösung in einem System von homogenen linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten.

Summary. This paper contains an essay over a problem of chained probabilities as treated by Markoff, Fréchet, and others. The matrix of transition probabilities which are considered here is characterized by the fact that all the elements above the main diagonal are zero. In the discontinuous case the problem leads to certain powers of a matrix, the solution of which is based on a transformation of that matrix into a similar diagonal matrix or into a similar matrix of Jordan's normal type. In the continuous case the solution consists of a system of linear homogeneous differential equations with constant coefficients.

Résumé. Cet essai se propose d'étudier un problème des probabilités en chaîne traitées par MM. Markoff, Fréchet, et autres. La matrice des probabilités transitives est caractérisée par le fait que tous les éléments au dessus de la diagonale principale sont zéro. Dans le cas discontinu le problème conduit à des puissances d'une matrice, dont la solution est basée sur une transformation de cette matrice en une matrice similaire diagonale ou du type normal de Jordan. Dans le cas continu la solution consiste dans un système d'équations différentielles linéaires et homogènes avec des coefficients constants.

§ 1. Das diskontinuierliche Problem.

Wir gehen von der Problemstellung aus, daß zwei Gruppen von Elementen vorhanden sind, die Gruppe K_1 mit den s -Elementen $a_1 \dots a_s$ und die Gruppe K_2 mit den n -Elementen $b_1 \dots b_n$.

Jedes a_i wählt unabhängig von den übrigen Elementen der Klasse K_1 ein und nur ein b_i und löscht dieses mit einer Wahrscheinlichkeit w , die als bekannt angenommen wird und für alle a_i gleich groß sein soll. Es wird nun die Wahrscheinlichkeit $V(s, n, t, w)$ ¹ bestimmt, daß die s -Elemente aus K_1 genau t -Elemente aus K_2 löschen, wenn sämtliche a_i in der oben beschriebenen Weise gleichzeitig auf die b_i einwirken. Hierbei ist zu beachten, daß zwar jedes b_i von mehreren a_i gewählt, aber nur einmal gelöscht werden kann.

Vorerst soll die Wahrscheinlichkeit V_k , daß die s a_i höchstens k bestimmte vorher aus K_2 herausgegriffene Elemente löschen und keine anderen, bestimmt werden. V_k ist zugleich die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die a_i keines der $n - k$ übrigbleiben-

¹ Die folgende Ableitung der Wahrscheinlichkeit $V(s, n, t, w)$ wurde von Herrn Professor Dr. Hlawka angegeben (nicht veröffentlicht).

den b_i löschen. Nun ist für ein a_i die Wahrscheinlichkeit eines dieser $n - k$ b_i zu wählen $(n - k)/n$ ($n \neq 0$) es zu löschen $w(n - k)/n$, es nicht zu löschen $1 - w(n - k)/n$. Die Wahrscheinlichkeit V_k , daß die a_i diese $n - k$ b_i nicht löschen, ist daher:

$$V_k = [1 - w(n - k)/n]^g, \quad 0 \leq k \leq n, \quad n \neq 0. \quad (1)$$

Beschränkt man sich im Falle $n = 0$ ebenfalls auf das Intervall $0 \leq k \leq n$, so ist nur $k = 0$ möglich. Die Wahrscheinlichkeit, ein b_i zu wählen, ist dann 0, ebenso es zu löschen. Also gilt:

$$V_0 = 1, \quad n = 0. \quad (1a)$$

Bezeichnen wir mit $\bar{V}(s, n, t, w)$ bzw. $\bar{V}_{s, t}$ die Wahrscheinlichkeit, daß die s a_i genau t vorgegebene b_i löschen, dann ist:

$$V_k = \bar{V}_{s, k} + \binom{k}{1} \bar{V}_{s, k-1} + \dots + \binom{k}{k} \bar{V}_{s, 0}, \quad k \leq n,$$

$$V_k = \bar{V}_{s, 0} + \binom{k}{1} \bar{V}_{s, 1} + \dots + \binom{k}{k} \bar{V}_{s, k},$$

für $k = 1, 2, \dots, t$ ($t \leq n$) erhält man:

$$V_0 = \overline{V}_{s, 0},$$

$$V_1 = \overline{V}_{s, 0} + \overline{V}_{s, 1},$$

$$V_t = \bar{V}_{s, 0} + \binom{t}{1} \bar{V}_{s, 1} + \binom{t}{2} \bar{V}_{s, 2} + \dots + \binom{t}{t} \bar{V}_{s, t}.$$

Die Auflösung dieses Gleichungssystems nach $\bar{V}_{s, t}$ erfolgt dadurch, daß man die Gleichungen der Reihe nach mit:

$$\binom{t}{0}, -\binom{t}{1}, \binom{t}{2}, \dots, (-1)^t \binom{t}{t}$$

multipliziert und dann die Summe $\sum_{k=0}^t (-1)^k \binom{t}{k} V_k$ bildet.

Es ergibt sich dann²:

$$\sum_{k=0}^t (-1)^k \binom{t}{k} V_k = \bar{V}_s, \quad t(-1)^t.$$

Daraus folgt [vgl. (1)]:

$$\bar{V}(s, n, t, w) = (-1)^t \sum_{k=0}^t (-1)^k \binom{t}{k} [1 - (n-k)w/n]^s, \quad t \leq n, \quad n \neq 0. \quad (2)$$

Für $n = t = 0$ ist $\bar{V}_{s,t} = V_0$, daher folgt aus (1a):

$$\bar{V}(s, 0, 0, w) = 1. \quad (2a)$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß die s -Elemente aus K_1 t -Elemente aus K_2 löschen, ist daher:

$$V(s, n, t, w) = \sum_{k=0}^t \binom{t}{k} (-1)^{t+k} [1 - (n-k)w/n]^s, \quad n \neq 0. \quad (3)$$

² Vgl. E. Netto: Lehrbuch der Kombinatorik, S. 255, Formel (43):

$$\sum_{k=0}^t (-1)^k \binom{t}{k} \binom{k}{i} = \begin{cases} 0, & i \neq t, \\ (-1)^t, & i = t. \end{cases}$$

Da $\binom{t}{k} = 0$ für $k > t$ kann beliebig weit nach oben summiert werden, ohne an dem Wert der Summe (3) etwas zu ändern.

Für $n = 0$ $t = 0$ ist $\bar{V}(s, 0, 0, w) = V(s, 0, 0, w)$.

Für $n = 0$ $t > 0$ ist $\binom{n}{t} = 0$.

Somit gilt:

$$V(s, 0, t, w) = \begin{cases} 1, & t = 0, \\ 0, & t > 0. \end{cases} \quad (3a)$$

Für $w = 0$ folgt aus (3):

$$V(s, n, t, 0) = \begin{cases} 1, & t = 0, \\ 0, & t > 0. \end{cases} \quad (3b)$$

Setzt man $w > 0$ voraus, so kann man (3) derart umformen:

$$V(s, n, t, w) = \binom{n}{t} (-1)^t (-w)^s / n^s \sum_{k=0}^t (-1)^k \binom{t}{k} (n - n/w - k)^s.$$

Da $\binom{n}{t} = 0$ für $t > n$ und $\sum_{k=0}^t \binom{t}{k} (-1)^k (n - n/w - k)^s = 0^3$ für $t > s$, gilt:

$$V(s, n, t, w) = 0, \quad t > \min(n, s)^4. \quad (3c)$$

Es soll nun noch die niedrigste Potenz von w in $V(s, n, t, w)$ bestimmt werden. Nach (3) ist:

$$\begin{aligned} V(s, n, t, w) &= \binom{n}{t} \sum_{k=0}^t \binom{t}{k} (-1)^{t+k} [1 - (n - k)w/n]^s = \\ &= \binom{n}{t} (-1)^t \sum_{k=0}^t \binom{t}{k} (-1)^k \sum_{j=0}^s \binom{s}{j} (-1)^j (n - k)^j w^j / n^j = \\ &= \binom{n}{t} (-1)^t \sum_{j=0}^s \binom{s}{j} (-1)^j w^j / n^j \sum_{k=0}^t \binom{t}{k} (-1)^k (n - k)^j = \\ &= \binom{n}{t} \binom{s}{t} w^t t! / n^t + \dots^5. \end{aligned}$$

Für $t = 1$ ergibt sich: $V(s, n, 1, w) = sw + \dots$

Bezeichnet man die Wahrscheinlichkeit, daß die s -Elemente aus K_1 $n - t$ -Elemente aus K_2 löschen, mit $W(s, n, t, w)$, so ist $W(s, n, t, w) = V(s, n, n - t, w)$ und aus (3) folgt:

$$W(s, n, t, w) = (-1)^{n-t} \binom{n}{t} \sum_{k=0}^{n-t} \binom{n-t}{k} (-1)^k [1 - (n - k)w/n]^s, \quad n \neq 0. \quad (4)$$

Für $n = 0$ ergibt sich [vgl. (3a)]:

$$W(s, 0, t, w) = \begin{cases} 1, & t = 0, \\ 0, & t > 0. \end{cases} \quad (4a)$$

³ Vgl. E. Netto: Lehrbuch der Kombinatorik, S. 249, Formel (17):

$$\sum_{k=0}^t \binom{t}{k} (-1)^k (n - k)^j = \begin{cases} 0 & j < t, \\ t! & j = t. \end{cases}$$

⁴ (3c) gilt auch für $n = 0$, $t = 0$. Vgl. (3a) und (3b).

⁵ Vgl. Anm. 3.

Die analogen Formen für (3b) und (3c) sind unmittelbar ersichtlich. Im weiteren Verlauf dieser Abhandlung soll $W(s, n, t, w)$ immer als Grundwahrscheinlichkeit bezeichnet werden.

Unter der Annahme, daß in der Klasse $K_1 n_1$ - (bisher mit s bezeichnet) Elemente mit der Löschungswahrscheinlichkeit w_1 und in $K_2 n_2$ - (bisher mit n bezeichnet) Elemente mit der Löschungswahrscheinlichkeit w_2 vorhanden sind und die Elemente der beiden Klassen gleichzeitig in der vorhin beschriebenen Weise aufeinander wirken, ist:

$$U^{(n+1)}(s_1, s_2) = \sum_0^{n_1} \sigma_1 \sum_0^{n_2} \sigma_2 U^{(n)}(\sigma_1, \sigma_2) W(\sigma_2, \sigma_1, s_1, w_2) W(\sigma_1, \sigma_2, s_2, w_1)^6, \quad (5)$$

wobei $U^{(n+1)}(s_1, s_2)$ die Wahrscheinlichkeit bedeutet, daß nach dem $n+1$ -Prozeß in K_1 genau s_1 - und in K_2 genau s_2 -Elemente vorhanden sind. Aus (3c) ergibt sich, daß sämtliche Glieder der Summe (5) für $\sigma_i < s_i$ ($i = 1, 2$) verschwinden.

Wir haben nun eine Anzahl $[(n_1 + 1)(n_2 + 1)]$ von Zuständen, charakterisiert durch die Zahl der Elemente (s_1, s_2) in den Klassen K_1 und K_2 . Für sie soll folgende „lexikographische“ Ordnung festgelegt werden:

(s_1, s_2) kommt vor (\bar{s}_1, \bar{s}_2) , wenn $s_2 > \bar{s}_2$. Ist $s_2 = \bar{s}_2$, so kommt (s_1, s_2) vor (\bar{s}_1, \bar{s}_2) , wenn $s_1 > \bar{s}_1$ ist. Die Wahrscheinlichkeit, daß nach einem oben definierten Vorgang der Zustand Z_j in den Zustand Z_k (j und k sind hierbei die Ordnungszahlen der betreffenden Zustände) übergeführt wird, nennen wir p_{jk} . Diese steht dann ein für alle Male fest, da wir annehmen, die Wahrscheinlichkeiten w_1 und w_2 bleiben bei sämtlichen Prozessen konstant. Aus (3c) und der lexikographischen Ordnung geht hervor, daß $p_{jk} = 0$ für $j > k$.

Die transponierte Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten $(p_{jk})^T$ ist daher Halbdagonalmatrix und soll mit \mathfrak{B}_t bezeichnet werden:

Es gilt dann:

$$\mathfrak{U}^{(n)} = \mathfrak{B}_t \mathfrak{U}^{(n-1)} = \dots = \mathfrak{B}_t^n \mathfrak{U}^{(0)}, \quad (6)$$

wobei $\mathfrak{U}^{(n)}$ die einspaltige Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten bedeutet und $\mathfrak{U}^{(0)}$ der 1. Einheitsvektor ist.

Um \mathfrak{B}_t^n zu bestimmen, wird man trachten, \mathfrak{B}_t auf Diagonalform zu transformieren, das heißt eine nicht singuläre Matrix A zu finden, derart, daß

$$A \mathfrak{B}_t A^{-1} = D^8 \quad (7)$$

gilt. $D \dots$ Diagonalmatrix.

Die Berechnung von \mathfrak{B}_t^n ist dann sehr einfach, weil D^n eine Diagonalmatrix ist, deren Elemente die entsprechenden Elemente von D zur n -ten Potenz erhoben sind⁹.

In dem Fall, wo sich \mathfrak{B}_t nicht auf eine reine Diagonalgestalt transformieren läßt, kann sie immer in eine Jordansche Normalform (das ist eine Matrix, die sich aus Kästchen der folgend angeführten Gestalt, längs der Hauptdiagonale zusammensetzt¹⁰) übergeführt werden.

⁶ Diese Art der Ableitung ist für verkettete Wahrscheinlichkeiten allgemein üblich. Vgl. Mises: Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung in der Statistik und theoretischen Physik, S. 534, Formel (4); Fréchet: Recherches théoriques modernes sur le calcul des probabilités. Second livres: Méthodes des fonctions arbitraires. Théorie des événements en chaîne dans le cas d'un nombre fini d'états possible, II. Bd., S. 24, Formel (I₁).

⁷ Diese Matrix wurde bereits von Mises und Fréchet untersucht. Vgl. Mises, § 16, Z. 3, S. 535 und Fréchet, II. Bd., S. 26. (Da von jedem Autor nur ein Werk benützt wurde, wird in den meisten Fällen lediglich der Verfasser zitiert.)

⁸ Vgl. O. Schreier und E. Sperner: Einführung in die analytische Geometrie und Algebra, II. Bd., § 7, S. 80 bis 103 (insbesondere die Sätze 1 bis 7).

⁹ $\mathfrak{B}_t^n = A^{-1} D^n A$.

¹⁰ Vgl. Schreier-Sperner: II. Bd., S. 126 bis 130; Die Jordansche Normalform.

Nun gilt:

$$\begin{pmatrix} a & & & 0 \\ 1 & a & & \\ & 1 & a & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ & 0 & & 1 & a \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & & & 0 \\ \binom{n}{1} a^{n-1} & a^n & & \\ \binom{n}{2} a^{n-2} & \dots & \binom{n}{1} a^{n-1} & a^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{n}{m-1} a^{n-m-1} & \binom{n}{m-2} a^{n-m-2} & \dots & \binom{n}{1} a^{n-1} a^n \end{pmatrix}$$

Also ist auch in diesem Falle die Potenzierung der Matrix leicht möglich.

Beispiel:

$n_1 = 3, n_2 = 1, w_1 = 0, w_2 > 0$ (wenn $w_2 = 0$, dann ist \mathfrak{B}_t die Einsmatrix). Nun ist:

$$\begin{pmatrix} U^{(n)}(3 \cdot 1) \\ U^{(n)}(2 \cdot 1) \\ U^{(n)}(1 \cdot 1) \\ U^{(n)}(0 \cdot 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - w_2) & & 0 \\ w_2 & (1 - w_2) & \\ & w_2 & (1 - w_2) \\ 0 & & w_2 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bezeichnet man die Matrix:

$$\begin{pmatrix} (1 - w_2) & 0 & 0 & 0 \\ 1 & (1 - w_2) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & (1 - w_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ mit } \bar{D}$$

so ist:

$$\begin{pmatrix} 1/w_2^2 & & 0 \\ 0 & 1/w_2 & \\ 0 & 0 & 1 \\ -1/w_2^2 & -1/w_2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \bar{D} \begin{pmatrix} w_2^2 & & 0 \\ 0 & w_2 & \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathfrak{B}_t$$

und es ergibt sich dann nach den Formeln (6) und (7):

$$\begin{pmatrix} U^{(n)}(3 \cdot 1) \\ U^{(n)}(2 \cdot 1) \\ U^{(n)}(1 \cdot 1) \\ U^{(n)}(0 \cdot 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - w_2)^n \\ \binom{n}{1} w_2 (1 - w_2)^{n-1} \\ \binom{n}{2} w_2^2 (1 - w_2)^{n-2} \\ 1 - (1 - w_2)^n - \binom{n}{1} w_2 (1 - w_2)^{n-1} - \binom{n}{2} w_2^2 (1 - w_2)^{n-2} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nun soll die Existenz des $\lim_{n \rightarrow \infty} U_k^{(n)} = U_k^{(\infty)}$ (k bedeutet die Ordnungszahl des betreffenden Zustandes) bewiesen, und der Grenzwert selbst näher untersucht werden.

Um diese Untersuchung zu erleichtern, sollen die Zustände, deren Übergangswahrscheinlichkeit $p_{kk} = 1$ ist, an den Schluß der Matrix $\mathfrak{U}^{(n)}$ geordnet werden. Da in der Spalte, wo $p_{kk} = 1$, sämtliche anderen Elemente Null sind, bleibt die Eigenschaft $p_{jk} = 0$ für $j > k$ erhalten, das heißt, daß \mathfrak{B}_t weiter Halbdagonalmatrix ist (also auch die Transformationsmatrix A). Da $\mathfrak{B}_t^n = A^{-1} D^n A$ ist, genügt es, die Existenz des Grenzwertes für die Diagonalmatrix D^n nachzuweisen; dieser ist aber

unmittelbar ersichtlich. Es ist $\mathfrak{B}_t^{(\infty)} = A^{-1} D^{(\infty)} A$. Auch wenn D keine reine Diagonalmatrix ist, sondern sich aus Kästchen der vorhin angegebenen Art zusammensetzt, ist $\lim_{n \rightarrow \infty} D^n$ leicht zu bestimmen: ist $|a| < 1$ so

$$D^\infty \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

Nun sind die Elemente von \mathfrak{B}_t^n linear homogene Funktionen von $p_{11}^n \dots p_{mm}^n$ [m bedeutet die Anzahl der Zustände und ist $(n_1 + 1)(n_2 + 1)$]. Da A bzw. A^{-1} Halbdiodalmatrizen sind, sind die Elemente der k -ten Zeile der Matrix \mathfrak{B}_t^n speziell lineare homogene Funktionen von $p_{11}^n \dots p_{kk}^n$.

Bezeichnet man die Zahl der Zustände, deren Übergangswahrscheinlichkeit $p_{kk} = 1$ ist, mit $m - \gamma$, so gilt nach der oben angegebenen Ordnung $p_{kk} < 1$ für $k \leq \gamma$ und es streben die Grenzwerte sämtlicher Elemente der ersten γ -Zeilen der Matrix \mathfrak{B}_t^n für $n \rightarrow \infty$ gegen Null. Also auch die $U_k^{(n)}$ ($k \leq \gamma$), denn diese sind ja die Elemente der ersten Spalte von \mathfrak{B}_t^n . Im Falle $k > \gamma$ ist $p_{kk} = 1$, das heißt, daß sämtliche anderen Elemente der k -ten Spalten ($k > \gamma$) von \mathfrak{B}_t Null sind, ebenso die entsprechenden Elemente von A bzw. A^{-1} .

Daraus folgt:

$$U_k^{(n)} = F_k(p_{11}^n \dots p_{\gamma\gamma}^n) + a_{k1} p_{kk}^n, k > \gamma, p_{kk} = 1.$$

a_{k1} bedeutet das Element der ersten Spalte und k -ten Zeile von A , wobei $F_k(p_{11}^n \dots p_{\gamma\gamma}^n)$ eine linear homogene Funktion von $p_{11}^n \dots p_{\gamma\gamma}^n$ ist, deren Grenzwerte wegen $p_{kk} < 1$ für $k \leq \gamma$ gegen Null strebt. Zusammenfassend gilt also¹¹:

$$U_k^{(\infty)} \rightarrow 0, \quad p_{kk} < 1, \quad (8a)$$

$$U_k^{(\infty)} \rightarrow a_{k1}, \quad p_{kk} = 1. \quad (8b)$$

Es soll jetzt noch untersucht werden, wie Z_k beschaffen sein muß, damit $p_{kk} = 1$, das heißt also, daß die beiden Grundwahrscheinlichkeiten $W(s_2, s_1, s_1, w_2)$ und $W(s_1, s_2, s_2, w_1) = 1$ sind.

Aus (4) und (4a) ergibt sich:

$$W(s_1, s_2, s_2, w_1) = \begin{cases} (1 - w_1)^{s_1}, & s_2 \neq 0, \\ 1, & s_2 = 0. \end{cases}$$

Daraus ist zu ersehen, daß für $w_1, w_2 > 0$ die Grenzwerte

$$U^{(\infty)}(s_1, 0) \text{ und } U^{(\infty)}(0, s_2) > 0 \quad (0 \leq s_1 \leq n_1, 0 \leq s_2 \leq n_2),$$

$$\text{für } w_1 = 0 \quad w_2 > 0 \text{ der Grenzwert } U^{(\infty)}(0, n_2) = 1^{12},$$

$$\text{für } w_1 > 0 \quad w_2 = 0 \text{ der Grenzwert } U^{(\infty)}(n_1, 0) = 1,$$

$$\text{für } w_1 = 0 \quad w_2 = 0 \text{ der Grenzwert } U^{(\infty)}(n_1, n_2) = 1.$$

Das hier betrachtete Problem der verketteten Wahrscheinlichkeiten gehört somit

¹¹ Hier wird darauf verwiesen, daß:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - w_i)^n = \begin{cases} 0, & 0 < w_i \leq 1, \\ 1, & w_i = 0. \end{cases} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} p_{kk}^n = \begin{cases} 0, & \leq p_{kk} < 1, \\ 1, & p_{kk} = 1. \end{cases}$$

¹² Alle übrigen Grenzwerte sind in diesen Fällen Null.

zu jenen, welche dadurch charakterisiert sind, daß „gewisse“ $p_{jk} = 0^{13}$. Solche Fälle wären z. B. der „cas de Hostinski“ und das „exemple du Lord Rayleigh“¹⁴.

Was die Methode der Auflösung durch Potenzierung der Matrix betrifft, ist diese natürlich auch bei anderen Wahrscheinlichkeitsketten, als bei den in dieser Arbeit speziell betrachteten durchführbar.

So ist z. B. beim „cas de deux états possibles“¹⁵:

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_t &= \begin{pmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b \end{pmatrix} & \left| \mathfrak{M}_t \right| &= 1-a-b & \begin{matrix} W_1 = 1, \\ W_2 = 1-a-b. \end{matrix} \\ A &= \begin{pmatrix} 1/(1-a-b) & 1/(1-a-b) \\ -a/b & 1 \end{pmatrix} & A^{-1} &= \begin{pmatrix} b(1-a-b)/(a+b) & -b/(a+b) \\ a(1-a-b)/(a+b) & +b/(a+b) \end{pmatrix} \\ D^n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1-a-b)^n \end{pmatrix} \\ \mathfrak{M}_t^n &= A^{-1} D^n A = \begin{pmatrix} [b+a(1-a-b)^n]/(a+b) & b[1-(1-a-b)^n]/(a+b) \\ a[1-(1-a-b)^n]/(a+b) & [a+b(1-a-b)^n]/(a+b) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

§ 2. Das kontinuierliche Problem.

Setzt man in (5) t statt n , $t + \Delta t$ statt $n + 1$ und $w_i \Delta t$ statt w_i , so bedeuten:

$U_k^{(t+\Delta t)}$ die Wahrscheinlichkeit, daß nach Ablauf der Zeit $t + \Delta t$ der Zustand $Z_k(s_1, s_2)$ tatsächlich besteht.

$U_j^{(t)}$ die Wahrscheinlichkeit, daß nach Ablauf der Zeit t der Zustand $Z_j(\sigma_1, \sigma_2)$ tatsächlich besteht.

$w_i \Delta t$ die Wahrscheinlichkeit, daß ein Element aus K_1 ein Element aus K_2 im Zeitintervall Δt löscht.

$W(\sigma_1, \sigma_2, s_2, w_1 \Delta t)$ die Wahrscheinlichkeit, daß, wenn in K_1 σ_1 , in K_2 σ_2 -Elemente vorhanden waren, nach Ablauf des Zeitintervalles Δt in K_2 noch s_2 -Elemente verbleiben.

Aus Formel (5) und den nachfolgenden Ausführungen ergibt sich unter Einführung der auf S. 211 angeführten Bezeichnungsweise:

$$U_k^{(t+\Delta t)} = \sum_{j=1}^k U_j^{(t)} p_{jk}(\Delta t)^{16}$$

und somit ist:

$$U_k^{(t+\Delta t)} - U_k^{(t)} p_{kk}(\Delta t) = \sum_{j=1}^{k-1} U_j^{(t)} p_{jk}(\Delta t). \quad (9)$$

Setzt man:

$$p_{jk} = \begin{cases} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \cdot \frac{p_{jk}(\Delta t)}{\Delta t}^{17}, & j \neq k, \\ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \cdot \frac{1 + p_{kk}(\Delta t)}{\Delta t} = -(s_1 w_1 + s_2 w_2)^{18}, & j = k. \end{cases}$$

¹³ Es ist jedoch festzuhalten, daß bei dem in dieser Arbeit betrachteten Problem nicht etwa wie beim „cas de Hostinski“ der „cas régulier“ verwirklicht ist. Die Limites $U_k^{(\infty)}$ sind ja vom Anfangszustand (n_1, n_2) abhängig. Man vergleiche Fréchet: II. Bd, S. 33, Beispiel III.

¹⁴ Fréchet: II. Bd., S. 33 und 98.

¹⁵ Fréchet: II. Bd., S. 119 und 120.

¹⁶ $p_{jk}(\Delta t) = W(\sigma_2, \sigma_1, s_1, w_2 \Delta t) W(\sigma_1, \sigma_2, s_2, w_1 \Delta t)$.

¹⁷ Bei den $p_{jk}(\Delta t)$ ($j \neq k$) sind zwei Fälle zu unterscheiden: 1. $p_{jk} = 0$, 2. $p_{jk} > 0$. Im zweiten Fall sind alle $\sigma_i \geq s_i$, aber mindestens ein $\sigma_i > s_i \geq 0$ und man kann aus $p_{jk}(\Delta t) \Delta t$ herausheben (vgl. die Ausführung über die Bestimmung der niedrigsten Potenz von w , S. 210). Daher ist $p_{jk}(\Delta t)/\Delta t$ eine ganze rationale Funktion in Δt , deren Grenzwert für $\Delta t \rightarrow 0$ existiert.

¹⁸ Die w_i sind Wahrscheinlichkeitsdichten, die also auch > 1 sein können.

und bezeichnet den $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{U_k^{(t+\Delta t)} - U_k^{(t)}}{\Delta t}$ mit $\frac{dU_k^{(t)}}{dt}$, so ergibt sich aus (9) folgendes System von Differentialgleichungen:

$$\frac{d}{dt} U_k^{(t)} = \sum_{j=1}^k U_k^{(t)} \bar{p}_{jk}. \quad (10)$$

Die Differentialgleichungen dieses Systems sind linear und homogen mit konstanten Koeffizienten (\bar{p}_{jk}). Die einfachste Auflösungsmöglichkeit ist durch die Bedingung $\bar{p}_{jk} = 0$ für $j > k$ unmittelbar gegeben¹⁹.

Aus (10) und den Anfangsbedingungen:

$$U_k^{(0)} = \begin{cases} 1, & k = 1, \\ 0, & k > 1, \end{cases}$$

folgt:

$$U_k^{(t)} = \begin{cases} e^{\bar{p}_{11}t} & k = 1, \\ e^{\bar{p}_{kk}t} \int_0^t \left(\sum_{j=1}^{k-1} U_j^{(\tau)} \bar{p}_{jk} \right) e^{\bar{p}_{kk}\tau} d\tau, & k > 1. \end{cases} \quad (11)$$

Da das System (10) ein d'Alembertsches System ist, gilt für den Fall, daß alle \bar{p}_{kk} voneinander verschieden sind:

$$U_k^{(t)} = \sum_{\mu=1}^k c_{k\mu} e^{\bar{p}_{\mu\mu}t} \quad c_{k\mu} \dots \text{Konstante.} \quad (12)$$

Der Fall, daß mehrere \bar{p}_{kk} ²¹ gleich sind, soll an Hand eines Beispielles (man vergleiche S. 212) erläutert werden:

Beispiel:

$$n_1 = 3 \quad n_2 = 1 \quad w_1 = 0 \quad w_2 > 0,$$

$$\frac{d}{dt} U^{(t)}(3 \cdot 1) = -w_2 U^{(t)}(3 \cdot 1), \quad U^{(0)}(3 \cdot 1) = 1,$$

$$\frac{d}{dt} U^{(t)}(2 \cdot 1) = w_2 U^{(t)}(3 \cdot 1) - w_2 U^{(t)}(2 \cdot 1), \quad U^{(0)}(2 \cdot 1) = 0,$$

$$\frac{d}{dt} U^{(t)}(1 \cdot 1) = w_2 U^{(t)}(2 \cdot 1) - w_2 U^{(t)}(1 \cdot 1), \quad U^{(0)}(1 \cdot 1) = 0,$$

$$\frac{d}{dt} U^{(t)}(0 \cdot 1) = w_2 U^{(t)}(1 \cdot 1), \quad U^{(0)}(0 \cdot 1) = 0,$$

$$U^{(t)}(3 \cdot 1) = e^{-w_2 t},$$

$$U^{(t)}(2 \cdot 1) = w_2 t e^{-w_2 t},$$

$$U^{(t)}(1 \cdot 1) = \frac{1}{2} w_2^2 t^2 e^{-w_2 t},$$

$$U^{(t)}(0 \cdot 1) = 1 - e^{-w_2 t} - w_2 t e^{-w_2 t} - \frac{1}{2} w_2^2 t^2 e^{-w_2 t}.$$

Die Existenz des $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} U_k^{(t)}$ ist aus (12) unmittelbar ersichtlich. Auch wenn die $c_{k\mu}$ keine Konstanten, sondern Funktionen von t von der Gestalt $c_{k\mu} t^i$ sind.

Ordnet man die Zustände wie bei der Betrachtung des diskontinuierlichen Grenzwertes, so ergibt sich aus (11):

¹⁹ Vgl. Serret-Scheffers Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung, Bd. III, S. 281.

²⁰ Vgl. Serret-Scheffers Bd. III, S. 301 bis 306. Da (\bar{p}_{jk}) Halbdagonalmatrix ist, sind die \bar{p}_{kk} die Wurzeln der charakteristischen Gleichung.

²¹ Allgemein: vgl. Serret-Scheffers Bd. III, S. 312, Satz 13.

$$U_k^{(t)} = e^{\bar{p}_{kk} t} \int_0^t \left(\sum_{j=1}^{k-1} \bar{p}_{jk} U_j^{(\tau)} \right) e^{-\bar{p}_{kk} \tau} d\tau, \quad k \leq \gamma, \quad \bar{p}_{kk} < 0,$$

$$U_k^{(t)} = \int_0^t \left(\sum_{j=1}^{\gamma} \bar{p}_{jk} U_j^{(\tau)} \right) d\tau, \quad k > \gamma, \quad \bar{p}_{kk} = 0.$$

Aus (12) folgt dann, daß wie beim diskontinuierlichen Problem $U_k^{(\infty)} \rightarrow 0$ strebt, für $k \leq \gamma$. Damit $U_k^{(\infty)} \rightarrow B$ $0 < B \leq 1$ strebt, ist also notwendig, daß $k > \gamma$. Doch kann der Fall eintreten, daß der diskontinuierliche Grenzwert größer Null, der kontinuierliche hingegen gleich Null wird²².

Tabelle 1 a*.

0·1 gegen 0·1.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	47 6 47	84 2 14	97 0 3	99 0 1	100 0 0					
2	14 2 84	49 2 49	79 1 20	93 0 7	98 0 2	100 0 0				
3	3 0 97	20 1 79	49·5 1 49·5	75 1 24	90 0 10	97 0 3	99 0 1	100 0 0		
4	1 0 99	7 0 93	24 1 75	49·5 1 49·5	73 0 27	88 0 12	95 0 5	98 0 2	100 0 0	
5	0 0 100	2 0 98	10 0 90	27 0 73	49·5 1 49·5	71 0 29	86 0 14	94 0 6	98 0 2	99 0 1
6		0 0 100	3 0 97	12 0 88	29 0 71	50 0 50	70 0 30	84 0 16	93 0 7	97 0 3
7		0 0 100	1 0 99	5 0 95	14 0 86	30 0 70	50 0 50	68 0 32	82 0 18	91 0 9
8			0 0 100	2 0 98	6 0 94	16 0 84	32 0 68	50 0 50	67 0 33	81 0 19
9				0 0 100	2 0 98	7 0 93	18 0 82	33 0 67	50 0 50	66 0 34
10				0 0 100	1 0 99	3 0 97	9 0 91	19 0 81	34 0 66	50 0 50

²² Vgl. § 3, I. $U^\infty(0, 0)$.

* Zur Erläuterung der Tabellen vgl. S. 222.

Der Übergang vom diskontinuierlichen zum kontinuierlichen Problem wurde somit nach der Methode von Kolmogoroff mit dem Unterschied durchgeführt, daß Kolmogoroff von der diskontinuierlichen Lösung ausgeht, wogegen hier kontinuierliches Löschen angenommen wurde²³.

§ 3. Konkrete Beispiele.

I. In jeder Klasse nur ein Element.

a) Diskontinuierlich:

$$\begin{aligned} U^{(n+1)}(1\cdot1) &= (1 - w_2)(1 - w_1) U^{(n)}(1\cdot1), \\ U^{(n+1)}(0\cdot1) &= w_2(1 - w_1) U^{(n)}(1\cdot1) + U^{(n)}(0\cdot1), \\ U^{(n+1)}(1\cdot0) &= w_1(1 - w_2) U^{(n)}(1\cdot1) + U^{(n)}(1\cdot0), \\ U^{(n+1)}(0\cdot0) &= w_2 w_1 U^{(n)}(1\cdot1) + U^{(n)}(0\cdot0), \end{aligned}$$

Tabelle 1 b.

0·1 gegen 0·5.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	9 9 82	38 6 56	64 4 32	83 2 15	93 1 6	98 0 2	99 0 1	100 0 0		
2	0 0 100	4 2 94	17 3 80	35 3 62	56 2 42	73 2 25	85 1 14	93 0 7	97 0 3	99 0 1
3		0 0 100	2 1 97	8 1 91	18 2 80	34 2 64	51 2 47	67 1 32	79 1 20	88 1 11
4			0 0 100	1 0 99	4 0 96	9 1 90	19 1 80	32 1 67	47 1 52	62 1 37
5					0 0 100	2 0 98	5 0 95	10 1 89	19 1 80	31 1 68
6						0 0 100	1 0 99	2 0 98	6 0 94	11 1 88
7								0 0 100	1 0 99	3 0 97
8									0 0 100	1 0 99
9										0 0 100

²³ Vgl. Fréchet: II. Bd., S. 202, letzter Satz, und S. 205, Formel (6).

$$\frac{d}{dt} U^{(t)}(1 \cdot 0) = w_1 U^{(t)}(1 \cdot 1),$$

$$\frac{d}{dt} U^{(t)}(0 \cdot 0) = 0$$

und man erhält:

$$U^{(t)}(1 \cdot 1) = e^W U^{(0)}(1 \cdot 1),$$

$$U^{(t)}(0 \cdot 1) = w_2 (1 - e^W) U^{(0)}(1 \cdot 1) / (w_2 + w_1) + U^{(0)}(0 \cdot 1),$$

$$U^{(t)}(1 \cdot 0) = w_1 (1 - e^W) U^{(0)}(1 \cdot 1) / (w_2 + w_1) + U^{(0)}(1 \cdot 0),$$

$$U^{(t)}(0 \cdot 0) = U^{(0)}(0 \cdot 0),$$

$$e^W = e^{-(w_2 + w_1)t}.$$

Tabelle 2 a.

0·9 gegen 0·1.

	1	2	3	4	5	6	7
1	89 10 1	100 0 0					
2	71 8 21	98 1 1	100 0 0				
3	50 6 44	93 3 4	100 0 0				
4	32 3 65	83 3 14	98 1 1	100 0 0			
5	18 2 80	69 3 28	95 1 4	100 0 0			
6	9 1 90	52 3 45	89 1 10	99 0 1	100 0 0		
7	4 0 96	37 2 61	79 2 19	96 1 3	100 0 0		
8	2 0 98	24 2 74	67 2 31	92 1 7	99 0 1	100 0 0	
9	1 0 99	15 1 84	53 2 45	85 1 14	97 1 2	100 0 0	
10	0 0 100	8 1 91	39 2 59	76 2 22	94 1 5	99 0 1	100 0 0

Das Problem der Vorgabe:

Wenn man $0 < w_1 < w_2$ voraussetzt, ist $U^{(\infty)}(0\cdot1) > U^{(\infty)}(1\cdot0)$.

Es wird nun folgende Frage gestellt:

Welche Verteilung $U^{(0)}(1\cdot1)$, $U^{(0)}(0\cdot1)$, $U^{(0)}(1\cdot0)$, $U^{(0)}(0\cdot0)$ muß bestehen, damit $U^{(\infty)}(0\cdot1) = U^{(\infty)}(1\cdot0)$?

Aus $U^{(\infty)}(0\cdot1) \doteq U^{(\infty)}(1\cdot0)$ folgt:

a) diskontinuierlich:

$$U^{(0)}(1\cdot0) = 1/(2w_2 - w_1w_2) \{ (w_2 - w_1) [1 - U^{(0)}(0\cdot1) - U^{(0)}(0\cdot0)] + [1 - (1 - w_2)(1 - w_1)] U^{(0)}(0\cdot1) \};$$

Tabelle 2 b.

0·9 gegen 0·5.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	47 47 6	100 0 0								
2	11 11 78	68 22 10	97 3 0	100 0 0						
3	1 1 98	29 19 52	77 14 9	97 2 1	100 0 0					
4	0 0 100	5 7 88	44 15 41	82 9 9	97 2 1	100 0 0				
5	0 0 100	1 1 98	17 8 75	55 13 32	86 7 7	98 1 1	100 0 0			
6		0 0 100	4 3 93	28 10 62	64 11 25	89 5 6	98 1 1	100 0 0		
7		0 0 100	1 0 99	10 5 85	38 10 52	71 8 21	91 4 5	98 1 1	100 0 0	
8			0 0 100	3 1 96	17 6 77	47 9 44	76 7 17	93 3 4	98 1 1	100 0 0
9			0 0 100	1 0 99	6 3 91	25 7 68	55 8 37	81 5 14	94 2 4	99 0 1
10				0 0 100	2 1 97	11 4 85	34 7 59	62 7 31	84 4 12	95 2 3

b) kontinuierlich:

$$U^{(0)}(1\cdot0) = 1/2 w_2 \{ (w_2 - w_1) [1 - U^{(0)}(0\cdot1) - U^{(0)}(0\cdot0)] + (w_2 + w_1) U^{(0)}(0\cdot1) \}.$$

Unter der Annahme $U^{(0)}(0\cdot1) = U^{(0)}(0\cdot0) = 0$ würde also das Element K_1 die Vorgabe:

a) diskontinuierlich: $U^{(0)}(1\cdot0) = (w_2 - w_1)/(2 w_2 - w_1 w_2);$

b) kontinuierlich: $U^{(0)}(1\cdot0) = (w_2 - w_1)/2 w_2$
benötigen, damit $U^{(\infty)}(0\cdot1) = U^{(\infty)}(1\cdot0).$

Tabelle 2 c.
0·9 gegen 0·9.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	9 82 9	99 1 0	100 0 0							
2	0 1 99	28 44 28	83 15 2	100 0 0						
3	0 0 100	2 15 83	31 38 31	80 15 5	99 1 0	100 0 0				
4		0 0 100	5 15 80	36 28 36	78 13 9	96 3 1	100 0 0			
5		0 0 100	0 1 99	9 13 78	39 22 39	75 14 11	94 4 2	99 1 0	100 0 0	
6			0 0 100	1 3 96	11 14 75	40 20 40	72 14 14	92 5 3	99 1 0	100 0 0
7				0 0 100	2 4 94	14 14 72	40·5 19 40·5	71 14 15	91 5 4	98 1 1
8				0 0 100	0 1 99	3 5 92	15 14 71	41 18 41	70 13 17	89 6 5
9					0 0 100	0 1 99	4 5 91	17 13 70	42 16 42	69 12 19
10						0 0 100	1 1 98	5 6 89	19 12 89	43 14 43

Anschließend wird eine tabellarische Übersicht über die numerischen Werte der Vorgabe angegeben:

a) diskontinuierlich:

w_2	w_1		w_2	w_1		w_2	w_1	
1	0·0	0·500 000	0·9	0·0	0·500 000	0·5	0·0	0·500 000
1	0·1	0·473 684	0·9	0·1	0·467 836	0·5	0·1	0·421 053
1	0·5	0·333 333	0·9	0·5	0·296 296	0·5	0·3	0·235 294
1	0·9	0·090 909	0·9	0·7	0·170 940	0·3	0·1	0·350 877

b) kontinuierlich:

w_2	w_1		w_2	w_1		w_2	w_1	
1	0·0	0·500 000	0·9	0·0	0·500 000	0·5	0·0	0·500 000
1	0·1	0·450 000	0·9	0·1	0·444 444	0·5	0·1	0·400 000
1	0·5	0·250 000	0·9	0·5	0·222 222	0·5	0·3	0·200 000
1	0·9	0·050 000	0·9	0·7	0·111 111	0·3	0·1	0·333 333

II. Numerische Übersicht.

Die Tabellen der Seiten 216 bis 221 geben eine Übersicht²⁴ der Werte von:

$$\sum_{v=1}^{n_1} U^{(\infty)}(v, 0) \dots 1. \text{ Zeile,}$$

$$U^{(\infty)}(0, 0) \dots 2. \text{ Zeile,}$$

$$\sum_{\mu=1}^{n_2} U^{(\infty)}(0, \mu) \dots 3. \text{ Zeile,}$$

bis zu 10 Elementen in jeder Klasse, und zwar:

Tab. 1 $w_1 = 0·1$ und $w_2 =$ a) 0·1, b) 0·5, c) 0·9,

Tab. 2 $w_1 = 0·9$ und $w_2 =$ a) 0·1, b) 0·5, c) 0·9,

wobei z. B. bei Tab. 1 b:

		5	
		!	
		18	
3		2	folgendes bedeutet:
		80	

K_1 : 5 Elemente $w_1 = 0·1$, K_2 : 3 Elemente $w_2 = 0·5$,

$$\sum_{v=1}^5 U^{(\infty)}(v, 0) = 18\%,$$

$$U^{(\infty)}(0, 0) = 2\%,$$

$$\sum_{\mu=1}^3 U^{(\infty)}(0, \mu) = 80\%.$$

²⁴ Diskontinuierlich.

Ein werkstoffgerechtes Verfahren zur Bemessung von Durchlaufbalken aus Stahlbeton.

Von K. Jäger, Wien.

Mit 5 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Verschärfte Ermittlung der Biegemomente in statisch unbestimmten Stahlbetonbalken unter Berücksichtigung der zufolge der Verteilung der Stahleinlagen veränderlichen Biegesteifigkeit, welche durch das in jedem Querschnitt aufnehmbare Tragmoment definiert wird.

Summary. The paper deals with a more exact method of computing the bending moments in statically indeterminate reinforced concrete beams. The bending stiffness, being defined by the load moment that may be taken by any cross-section, is allowed to be variable owing to the distribution of the steel reinforcements.

Résumé. Détermination précise des moments de flexion dans les poutres hyperstatiques en béton armé, compte tenu de la rigidité en flexion variable, due à la distribution des armatures d'acier et définie par le moment pouvant être encaissé dans chaque section.

1. Einleitung.

Die Ermittlung der Schnittkräfte in statisch unbestimmten Balken aus Stahlbeton erfolgt in üblicher Weise auf elastizitätstheoretischer Grundlage, das heißt unter der Annahme eines homogenen, isotropen und unbeschränkt elastischen Werkstoffes (Zustand I, volle Mitwirkung der Betonzugzone). Die genannten Voraussetzungen treffen zwar für sehr kleine Laststufen hinreichend genau zu, sie gelten jedoch weder für die Gebrauchslast und noch weit weniger im Bereich der praktisch aufnehmbaren Last (Traglast). Das in den meisten Ländern für die Bemessung noch verwendete n -Verfahren beruht auf der Ausschaltung der Betonzugzone und auf der Annahme des Hookeschen Gesetzes für Beton und Stahl mit einem unveränderlichen Wert $n = 15$ der Elastizitätsmoduli (Zustand II), es ist somit auf den Bereich der Gebrauchslast abgestimmt und vermag im allgemeinen keinen Aufschluß über die Tragfähigkeit und damit über die Sicherheit des Bauteiles zu geben.

Die verlässliche Vorausberechnung der Tragfähigkeit von Bauteilen aus Stahlbeton ermöglicht vor allem die richtige Auswertung von Versuchsergebnissen, sie ist nicht nur wegen der besseren Ausnutzung der Festigkeitseigenschaften des Betons von größter wirtschaftlicher Bedeutung, sondern auch im Hinblick auf die in jüngster Zeit immer mehr in Erscheinung tretende Vorspann-Bauweise, auf welche das n -Verfahren überhaupt nicht angewendet werden kann, zu einer Notwendigkeit geworden. In richtiger Erkenntnis dieser Zusammenhänge wurde in den vergangenen 15 Jahren eine Reihe von Forschungsarbeiten veröffentlicht, welche die Entwicklung neuer Berechnungsverfahren unter Bezugnahme auf Versuchsergebnisse bzw. unter Einführung der wirklichen Formänderungsgesetze von Stahl und Beton zum Ziele hatten. Während die Mehrzahl dieser Arbeiten lediglich die Vorausberechnung der Bruchlast bezweckt¹, strebt eine Gruppe anderer Untersuchungen vor allem die Darstellung des Tragverhaltens innerhalb des ganzen Lastbereiches an und gelangt hierbei zu der wichtigen Feststellung, daß nicht die Bruchlast selbst, sondern eine unter ihr liegende Last, die sog. Traglast² oder Kritische Last³ als Grundlage für die Bemessung

¹ R. Saliger: Die neue Theorie des Stahlbetons, 1. bis 3. Aufl. Wien: F. Deuticke. 1947 bis 1950. — F. Gebauer: Die Plastizitätstheorie im Stahlbetonbau. Wien: G. Fromme. 1949. — Weitere Literaturangaben in einer zusammenfassenden Darstellung von K. B. Haberstock: Die n -freien Berechnungsweisen des einfach bewehrten, rechteckigen Stahlbetonbalkens, Heft 103 des Deutschen Ausschusses für Stahlbeton, Berlin 1951.

² K. Jäger: Festigkeitsnachweis im Stahlbetonbau. Wien: Manzsche Verlagsbuchhandlung. 1948.

³ E. Bittner: Das Halbparabelverfahren. Selbstverlag, Oktober 1948. — H. Rüsch: Bruchlast und Bruchsicherheitsnachweis bei Biegebeanspruchung von Stahlbeton unter besonderer

anzusehen sei. Die Traglast entspricht hierbei jenem kritischen Zustand, in welchem die Dehnung der Stahleinlagen einen bestimmten Höchstwert nicht überschreitet (gefährlicher Rißzustand), wobei außerdem die zugehörige Längenänderung am Biegedruckrand durch die Betonstauchung am Beginn des bildsamen Zustandes (Einleitung der Gefügauflockerung) begrenzt sein soll²:

Aus dieser kurzen Betrachtung über den jetzigen Stand der Bemessungsgrundlagen folgt, daß die derzeitige Berechnung der Schnittkräfte und die Bemessung statisch unbestimmter Stahlbetonbalken unter verschiedenen und einander widersprechenden Voraussetzungen vorgenommen wird. Dies und die Tatsache, daß schließlich auch die Tragfähigkeit derartiger Bauteile von größter Bedeutung ist, veranlaßten den Verfasser, eine ausführliche Untersuchung über das Tragverhalten statisch unbestimmter Balken sowohl im Gebrauchszustand als auch im kritischen Zustand durchzuführen⁴, nachdem auf die grundsätzlichen Zusammenhänge schon in einer früheren Veröffentlichung hingewiesen wurde². Hierbei wurde festgestellt, daß das derzeitige Berechnungs- und Bemessungsverfahren im allgemeinen weder eine gleichzeitige Ausnutzung der Stahleinlagen an den Orten der Momentengrößtwerte noch die Einhaltung eines geforderten Sicherheitsgrades gewährleistet. Ferner konnte gezeigt werden, daß der Verlauf der Biegemomente von den in den maßgebenden Querschnitten (Feld- bzw. Einspann- oder Stützenquerschnitt) zufolge einer gegebenen Bewehrung vorhandenen Momentenaufnahmefähigkeit abhängt⁵. Diese Ergebnisse bestätigen also keinesfalls die allgemein herrschende Ansicht, daß die Berechnung der Schnittkräfte nach Zustand I durch die Versuchserfahrung vollauf gerechtfertigt sei. Es ist hierzu zu bemerken, daß die Abweichungen im allgemeinen zwar innerhalb des unvermeidlichen Streubereiches von Versuchen liegen und daher auf diesem Wege ohne Kenntnis der zu erwartenden theoretischen Werte mit Sicherheit gar nicht feststellbar sind⁴, daß aber ihre Berücksichtigung eine den wirklichen Verhältnissen besser entsprechende Verteilung der Bewehrung ermöglicht. Schließlich sei noch ausdrücklich hervorgehoben, daß mit einem mancherorts behaupteten „Ausgleich der Momentengrößtwerte durch Bildung von Fließgelenken“ im vorliegenden Falle selbstverständlich nicht gerechnet werden kann und darf^{4, 2, 1}.

Im Sinne der obigen Ausführungen wird anschließend ein für die praktische Anwendung geeignetes Iterationsverfahren entwickelt, welches den Eigenschaften des Verbundbaustoffes angepaßt ist und die Verbesserung des unter den üblichen Annahmen gefundenen Momentenverlaufes durch Berücksichtigung der Verteilung der Stahleinlagen ermöglicht. Im Rahmen dieses Aufsatzes kann die Lösung dieser Aufgabe nur grundsätzlich erfolgen und schränkt die Anwendung zunächst auf Balken mit feldweise unveränderlichem Rechteckquerschnitt ein. Bei der Ermittlung des Momentenverlaufes wird zweckmäßig die stufenweise Momentenverteilungsmethode von Cross verwendet, die vom einseitig bzw. vom beiderseits fest eingespannten Balken ausgeht und im folgenden als bekannt vorausgesetzt wird⁶.

Berücksichtigung der Vorspannung. Beton- u. Stahlbetonbau H. 9 (1950). — K. Jäger: Die Bedeutung des Traglastverfahrens für die Weiterentwicklung des Stahlbetonbaues. Vortrag, gehalten am Österr. Betontag 1951 in Wien. Österr. Bauz. H. 1/3 (1952). — K. Jäger: Über die Bemessungsgrundlagen im Stahlbetonbau. Österr. Bauztg. Heft 29/30 (1951).

⁴ K. Jäger: Der wahrscheinlichste Momentenverlauf in statisch unbestimmten Stahlbetonbalken. A. Leon-Gedenkschrift, Wien 1952.

⁵ K. Jäger: Die Beanspruchung statisch unbestimmter Stahlbetonbalken in Abhängigkeit von der Verteilung der Stahleinlagen. Z. österr. Ing.- u. Architekten-Ver., Heft 1/2, 3/4 (1952).

⁶ In anschaulicher und verbesserter Form ist dieses Verfahren dargestellt in Th. Titze: Momentenausgleichverfahren. — Berechnung von Durchlaufträgern und Rahmentragwerken mittels direkten Momentenausgleichs und vergleichsweise nach dem stufenweisen Momentenausgleich der Methode Cross. Wien: Manzsche Verlags- und Universitätsbuchhandlung. 1948.

2. Berechnungsgrundlagen.

In den genannten Voruntersuchungen^{4, 5} wurde nachgewiesen, daß die wahrscheinlichste Verteilung der Biegemomente sowohl für den Gebrauchszustand als auch knapp unterhalb der Traglast mit ausreichender Genauigkeit unter der Annahme einer bereichsweise konstanten Bewehrung ermittelt werden darf, die innerhalb des Bereiches der positiven bzw. negativen Momente dem aufnehmbaren Moment M^* des maßgebenden Feld- bzw. Stützenquerschnittes entspricht. Bezeichnet man mit h die Nutzhöhe des Balkens und mit $y_0 = \eta_0 h$ den Abstand der Null-Linie vom Biegedruckrand (üblicherweise mit x bezeichnet), so ist die reduzierte Biegesteifigkeit des Querschnittes durch den Ausdruck

$$B = M^* h (1 - \eta_0) \quad (1)$$

definiert, wobei M^* vom Stahlquerschnitt F_e und der Stahlspannung σ_e^* abhängt. Man kann in die Gl. (1) auch den Querschnitt F_e der Zugbewehrung einführen und gelangt damit zu der vom Verfasser früher gegebenen Darstellung der Biegesteifigkeit², für die nachfolgende Anwendung erweist sich jedoch der Begriff des aufnehmbaren Biegemomentes M^* als zweckmäßig und anschaulicher. Bezeichnet man ferner mit M_r das Regelmoment und mit $y_{0r} = \eta_{0r} h$ die zugehörige Breite der Betondruckzone, so gilt weiterhin für den nur zugbewehrten Querschnitt⁴

$$\eta_0 = \eta_{0r} \sqrt{\frac{M^*}{M_r}}, \quad M^* \leq M_r. \quad (2)$$

Im Falle einer Druckbewehrung, das heißt für $M^* \geq M_r$ ist $\eta_0 = \eta_{0r} = \text{konst.}$ zu setzen. Im Sinne des Traglastverfahrens ist als Regelmoment eines Querschnittes gegebener Abmessungen jenes Tragemoment definiert, welches einer gleichzeitigen vollen Ausnutzung des Betons und des Stahls entspricht, das heißt am Betondruckrand tritt die höchstzulassene Stauchung ε_p (Einleitung des bildsamen Zustandes) und in den Stahleinlagen die kritische Dehnung ε_e^* auf, so daß die Null-Linienlage durch

$$\eta_{0r} = \frac{\varepsilon_p}{(\varepsilon_p + \varepsilon_e^*)} \quad (3)$$

gegeben ist. Für die zahlenmäßige Auswertung wurde in den früheren Untersuchungen⁴ und wird auch weiterhin $\eta_{0r} = 0.40$ gesetzt, was z. B. $\varepsilon_p = 2\text{‰}$ — dieser Wert dürfte nach jüngsten Versuchen von H. Rüschi³ für alle Betongüten ziemlich konstant sein — und $\varepsilon_e^* = 3\text{‰}$ (Torstahl 40) entspricht; der Einfluß der Null-Linienlage auf die Ergebnisse wurde bereits diskutiert⁴.

Nachfolgend sollen die weiterhin benötigten Verhältnisse der Biegesteifigkeiten zweier Rechteckquerschnitte mit den aufnehmbaren Momenten M_1^* , M_2^* ; den Nutzhöhen h_1 , h_2 und gleicher Breite b (diese Annahme wird in einem Durchlaufbalken fast immer zutreffen) abgeleitet werden. Aus Gl. (1) und (2) folgt

$$\frac{B_1}{B_2} = \frac{M_1^* h_1 (1 - \eta_{01})}{M_2^* h_2 (1 - \eta_{02})} = \frac{M_1^* h_1}{M_2^* h_2} \cdot \frac{\left(1 - \eta_{0r} \sqrt{\frac{M_1^*}{M_{r1}}}\right)}{\left(1 - \eta_{0r} \sqrt{\frac{M_2^*}{M_{r2}}}\right)}, \quad (4)$$

wobei bei gleichen Werkstoffeigenschaften

$$\frac{M_{r1}}{M_{r2}} = \frac{h_1^2}{h_2^2} \quad (5)$$

gilt^{2, 4}. Nimmt man weiterhin $M_1^* \leq M_2^*$ an und setzt voraus, daß einer der beiden

Querschnitte voll ausgenutzt ist, daß also je nach dem Verhältnis der Nutzhöhen M_1^* oder M_2^* gleich dem Regelmoment M_{r1} bzw. M_{r2} ist, so folgt aus Gl. (4) und (5)

$$\frac{B_1}{B_2} = \frac{M_1^* h_1}{M_2^* h_2} \cdot \frac{\left(1 - \eta_{0r} \frac{h_2}{h_1} \sqrt{\frac{M_1^*}{M_2^*}}\right)}{(1 - \eta_{0r})} \quad \text{für } \frac{h_1}{h_2} \geq \sqrt{\frac{M_1^*}{M_2^*}} \quad (6)$$

bzw.

$$\frac{B_1}{B_2} = \frac{M_1^* h_1}{M_2^* h_2} \cdot \frac{(1 - \eta_{0r})}{\left(1 - \eta_{0r} \frac{h_1}{h_2} \sqrt{\frac{M_2^*}{M_1^*}}\right)} \quad \text{für } \frac{h_1}{h_2} \leq \sqrt{\frac{M_1^*}{M_2^*}} \quad (7)$$

Mit $\eta_{0r} = 0.40$ erhält man die Werte B_1/B_2 der Tab. 1, in welcher auch die extremsten Unterschiede in den Nutzhöhen berücksichtigt erscheinen.

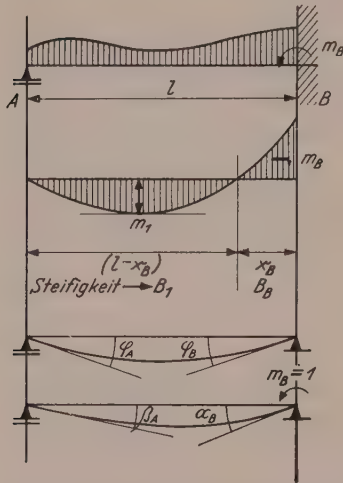


Abb. 1. Biegemomente und Biegewinkel im einseitig eingespannten Balken.

3. Der einseitig eingespannte Balken.

Der in Abb. 1 dargestellte, in A frei drehbar gelagerte und in B fest eingespannte Balken mit der Stützweite l und unveränderlicher Nutzhöhe h besitzt im Bereich $(l - x_B)$ der positiven Feldmomente die Biegesteifigkeit B_1 , im Bereich x_B der negativen Momente die Biegesteifigkeit B_B entsprechend den aufnehmbaren Biegemomenten M_1^* bzw. M_B^* gemäß Gl. (1). Zur Ermittlung des Einspannmomentes m_B geht man vom beiderseits frei drehbar gelagerten Balken aus und bezeichnet mit φ_A, φ_B die Biegewinkel am linken bzw. am rechten Auflager zufolge der Feldbelastung und mit α_B, β_A die Biegewinkel an den Auflagern zufolge des Momentes $m_B = 1$. Dieses Rechenverfahren setzt zunächst rein formal voraus, daß der Balken in den genannten Abschnitten sowohl ein positives als auch ein negatives Moment aufnehmen kann, im endgültigen Zustand ergibt sich jedoch eine Momentenverteilung gemäß Abb. 1 und hieraus die entsprechende Lage der

Zugbewehrung. Setzt man weiterhin eine Gleichlast g voraus und bezeichnet mit $x_B = \xi_B l$ die Entfernung des Momenten-Nullpunktes von der Einspannstelle, so erhält man⁴

$$B_B \varphi_B = \frac{1}{3} M_0 l \left[1 + \left(\frac{B_B}{B_1} - 1 \right) (1 + 3 \xi_B) (1 - \xi_B)^3 \right], \quad M_0 = \frac{1}{8} g l^2, \quad (8)$$

$$B_B \alpha_B = \frac{1}{3} l \left[1 + \left(\frac{B_B}{B_1} - 1 \right) (1 - \xi_B)^3 \right].$$

Tabelle 1. Verhältniswerte B_1/B_2 der Biegesteifigkeiten zweier Rechteckquerschnitte in Abhängigkeit von den aufnehmbaren Momenten M_1^*, M_2^* und den Nutzhöhen h_1, h_2 .

$\frac{h_1}{h_2}$	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.5	2.0	3.0	4.0	5.0
$\frac{M_1^*}{M_2^*}$										
1.0	0.13	0.29	0.47	0.71	1.00	1.82	2.67	4.33	6.00	7.67
0.8	0.11	0.23	0.39	0.60	0.86	1.53	2.19	3.53	4.85	6.18
0.6	0.08	0.18	0.31	0.49	0.69	1.19	1.69	2.69	3.69	4.69
0.4	0.05	0.13	0.23	0.36	0.50	0.83	1.17	1.83	2.50	3.16
0.2	0.03	0.08	0.14	0.21	0.27	0.43	0.61	0.94	1.27	1.61

Für volle Einspannung in B gilt die geometrische Bedingung $m_B \alpha_B + \varphi_B = 0$ und hieraus folgt

$$m_B = -\frac{\varphi_B}{\alpha_B} = -4 M_0 \xi_B \quad (9)$$

in Abhängigkeit vom Verhältnis der Biegesteifigkeiten B_B/B_1 , das heißt der aufnehmbaren Momente M_B^*/M_1^* gemäß Tab. 1 für $h_1 = h_2 = h$ und der Lage ξ_B des Momenten-Nullpunktes. Mittels Gl. (8) und (9) kann zunächst ξ_B und damit m_B bestimmt werden. Diese in der Voruntersuchung⁵ durchgeführte Auswertung kann mit ausreichender Annäherung durch die Annahme der Lage des Momenten-Nullpunktes als Funktion der aufnehmbaren Momente gemäß

$$\frac{M_B^*}{M_1^*} = \frac{4 \xi_B}{(1 - \xi_B)^2} \quad (10)$$

vereinfacht werden. Für den später vorzunehmenden Momentenausgleich im Auflager B eines Durchlaufbalkens wird die Stabsteifigkeit in diesem Punkt benötigt, die in üblicher Weise⁶ jenem durch 4 geteilten Moment s_B entspricht, das den Biege-
winkel $\varphi_B = 1$ erzeugt. Man erhält

$$s_B = \frac{3 B_B}{4 \left[1 + \left(\frac{B_B}{B_1} - 1 \right) (1 - \xi_B)^3 \right] l} \quad (11)$$

Tabelle 2. Der einseitig eingespannte Balken.

Einspannmoment m_B für veränderliche Biegesteifigkeit M_1^*/M_B^* , bezogen auf \bar{m}_B für $M_1^*/M_B^* = 1$ und Stabsteifigkeit s_B an der Einspannstelle B .

M_1^* ... aufnehmbares Moment im Feldbereich,

M_B^* ... aufnehmbares Moment im Einspannbereich.

$\frac{M_1^*}{M_B^*}$	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
$\frac{m_B}{\bar{m}_B}$	1.42	1.23	1.12	1.05	1.00	0.97	0.94	0.91	0.89	0.87
$\frac{s_B l}{B_B}$	0.48	0.56	0.63	0.69	0.75	0.80	0.86	0.93	1.00	1.07

Für den Balken mit konstanter Biegesteifigkeit $B_B = B_1$ ergibt sich im vorliegenden Belastungsfall das der üblichen Berechnung entsprechende Einspannmoment $\bar{m}_B = -M_0$ und die Stabsteifigkeit beträgt $s_B = 0.75 B/l$. Die Tab. 2 enthält die Verhältniswerte m_B/\bar{m}_B und die Stabsteifigkeiten s_B in Abhängigkeit vom Verhältnis M_1^*/M_2^* der in den maßgebenden Querschnitten aufnehmbaren Momente. Der Tabellenbereich ist durch den Mindestwert $M_1^*/M_B^* = 0.2$ als untere Grenze für die Feldbewehrung und den Höchstwert $M_1^*/M_B^* = 5$ eingegrenzt; die obere Grenze ergibt sich mit Rücksicht auf die aus dem Feld aufgebogenen Schrägeisen, die mit mindestens 50% der Feldbewehrung in Rechnung gestellt werden dürfen. Der anzustrebende Idealfall der gleichzeitigen Ausnutzung der Stahleinlagen im Feld- und Einspannquerschnitt ist erreicht, wenn die auftretenden Biegemomentengrößtwerte mit den aufnehmbaren Momenten identisch sind ($m_1 \equiv M_1^*$, $m_B \equiv M_B^*$) und dies trifft im vorliegenden Belastungsfall für $m_B = 1.26 \bar{m}_B$, das heißt bei einem um 26% über dem Ergebnis der üblichen Berechnung liegenden Moment zu⁵. Da der in Tab. 2 tabulierte Wert m_B/\bar{m}_B innerhalb der praktisch

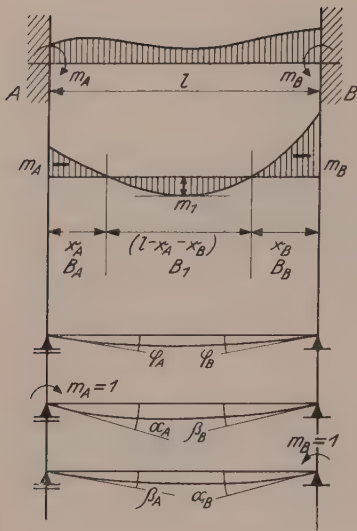


Abb. 2. Biegemomente und Biege- und Verdrehwinkel im beiderseits eingespannten Balken.

vorkommenden Verhältniswerte der aufnehmbaren Momente von der Belastungsart nur wenig abhängig ist⁵, kann die Tab. 2 nicht nur für Gleichlast, sondern mit ausreichender Genauigkeit auch für beliebige Feldbelastung (Einzellasten usw.) verwendet werden.

4. Der beiderseits eingespannte Balken.

Der in Abb. 2 dargestellte, beiderseits fest eingespannte Balken von der Stützweite l und mit unveränderlicher Nutzhöhe h besitzt in den Bereichen $x_A = \xi_A l$ bzw. $x_B = \xi_B l$ der negativen Biegemomente die Biegesteifigkeiten B_A bzw. B_B und innerhalb des Feldbereiches $(l - x_A - x_B)$ die Biegesteifigkeit B_1 . Zur Bestimmung der beiden Einspannmomente m_A und m_B geht man wieder vom frei drehbar gelagerten Balken aus und hat zunächst die beiden Biege- und Verdrehwinkel φ_A, φ_B zufolge der Feldbelastung und schließlich die Biege- und Verdrehwinkel α_A, β_B zufolge $m_A = 1$ bzw. $\alpha_B, \beta_A = \beta$ zufolge $m_B = 1$ zu ermitteln. Für Gleichlast erhält man zunächst mit $M_0 = \frac{1}{8} g l^2$

$$B_A \varphi_A = \frac{1}{3} M_0 l \left[1 + \left(\frac{B_A}{B_1} - 1 \right) (1 + 3 \xi_A) (1 - \xi_A)^3 + \left(\frac{B_A}{B_B} - \frac{B_A}{B_1} \right) (4 - 3 \xi_B) \xi_B^3 \right],$$

$$B_B \varphi_B = \frac{1}{3} M_0 l \left[1 + \left(\frac{B_B}{B_1} - 1 \right) (1 + 3 \xi_B) (1 - \xi_B)^3 + \left(\frac{B_B}{B_A} - \frac{B_B}{B_1} \right) (4 - 3 \xi_A) \xi_A^3 \right] \quad (12)$$

und weiterhin

$$\left. \begin{aligned} B_A \alpha_A &= \frac{1}{3} l \left[1 + \left(\frac{B_A}{B_1} - 1 \right) (1 - \xi_A)^3 + \left(\frac{B_A}{B_B} - \frac{B_A}{B_1} \right) \xi_B^3 \right], \\ B_B \alpha_B &= \frac{1}{3} l \left[1 + \left(\frac{B_B}{B_1} - 1 \right) (1 - \xi_B)^3 + \left(\frac{B_B}{B_A} - \frac{B_B}{B_1} \right) \xi_A^3 \right], \\ B_B \beta &= \frac{1}{2} l \left[1 - \left(\frac{B_B}{B_1} - 1 \right) (1 - \xi_B)^2 + \left(\frac{B_B}{B_A} - \frac{B_B}{B_1} \right) \xi_A^2 \right] - B_B \alpha_B. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Aus den geometrischen Bedingungen für volle Einspannung an beiden Stabenden

$$m_A \alpha_A + m_B \beta + \varphi_A = 0, \quad m_A \beta + m_B \alpha_B + \varphi_B = 0 \quad (14)$$

folgen die beiden Einspannmomente

$$m_A = \frac{(\varphi_B \beta - \varphi_A \alpha_B)}{(\alpha_A \alpha_B - \beta^2)}, \quad m_B = \frac{(\varphi_A \beta - \varphi_B \alpha_A)}{(\alpha_A \alpha_B - \beta^2)}. \quad (15)$$

Im vorliegenden Lastfall gilt außerdem

$$m_A = -4 M_0 \xi_A (1 - \xi_B), \quad m_B = -4 M_0 \xi_B (1 - \xi_A). \quad (16)$$

Führt man Gl. (16) und (13) in Gl. (14) ein, so erhält man zwei Gleichungen zur Ermittlung von ξ_A und ξ_B und damit aus Gl. (16) die beiden Einspannmomente als Funktion der Biegesteifigkeiten. Man umgeht die umständliche Berechnung der Momenten-Nullpunkte, wenn man diese aus den Gl. (16) so bestimmt, daß $|m_A| =$

Tabelle 4. Der beiderseits fest eingespannte Balken.
Stabsteifigkeiten.

Oberer Wert: $\frac{s_A l}{B_A}$. Unterer Wert: $\frac{s_B l}{B_B}$.

$\frac{M_A^*}{M_B^*} \backslash \frac{M_1^*}{M_B^*}$	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
1.0	0.74 0.73	0.81 0.81	0.88 0.88	0.94 0.94	1.00 1.00	1.06 1.06	1.12 1.12	1.19 1.19	1.26 1.26	1.33 1.33
0.8	0.77 0.73	0.86 0.81	0.95 0.87	1.04 0.93	1.12 0.99	1.19 1.04	1.26 1.11	1.34 1.18	1.33 1.25	1.33 1.33
0.6	0.80 0.73	0.92 0.80	1.03 0.86	1.14 0.92	1.25 0.98	1.36 1.03	1.34 1.10	1.34 1.17	1.33 1.25	1.33 1.33
0.5	0.84 0.72	0.99 0.79	1.13 0.85	1.27 0.91	1.40 0.97	1.36 1.03	1.34 1.10	1.34 1.17	1.33 1.25	1.33 1.33
0.4	0.89 0.71	1.10 0.78	1.27 0.84	1.45 0.90	1.40 0.96	1.36 1.03	1.34 1.10	1.34 1.17	1.33 1.25	1.33 1.33
0.3	1.02 0.71	1.28 0.76	1.51 0.82	1.45 0.90	1.40 0.96	1.36 1.03	1.34 1.10	1.34 1.17	1.33 1.25	1.33 1.33
0.2	1.19 0.69	1.58 0.74	1.51 0.82	1.45 0.90	1.40 0.96	1.36 1.03	1.34 1.10	1.34 1.17	1.33 1.25	1.33 1.33

Tabelle 5. Der beiderseits fest eingespannte Balken.
Übertragungsziffern.

Oberer Wert: v_A . Unterer Wert: v_B .

$\frac{M_A^*}{M_B^*} \backslash \frac{M_1^*}{M_B^*}$	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
1.0	0.68 0.68	0.60 0.60	0.55 0.55	0.52 0.52	0.50 0.50	0.48 0.48	0.47 0.47	0.46 0.46	0.45 0.45	0.44 0.44
0.8	0.62 0.71	0.56 0.62	0.53 0.56	0.50 0.52	0.48 0.50	0.46 0.48	0.45 0.47	0.45 0.46	0.44 0.45	0.44 0.44
0.6	0.57 0.75	0.53 0.63	0.50 0.57	0.48 0.53	0.46 0.50	0.45 0.48	0.45 0.47	0.45 0.46	0.44 0.45	0.44 0.44
0.5	0.53 0.78	0.49 0.64	0.47 0.57	0.45 0.53	0.45 0.50	0.45 0.48	0.45 0.47	0.44 0.46	0.44 0.45	0.44 0.44
0.4	0.49 0.80	0.47 0.65	0.45 0.58	0.45 0.54	0.45 0.51	0.45 0.49	0.45 0.47	0.44 0.46	0.44 0.45	0.44 0.44
0.3	0.44 0.83	0.42 0.66	0.41 0.59	0.43 0.54	0.45 0.51	0.45 0.49	0.45 0.47	0.44 0.46	0.44 0.45	0.44 0.44
0.2	0.40 0.86	0.39 0.67	0.41 0.59	0.43 0.54	0.45 0.51	0.45 0.49	0.45 0.47	0.44 0.46	0.44 0.45	0.44 0.44

5. Der Durchlaufbalken.

Wie bereits in Abschnitt 3 erwähnt wurde, hat die Voruntersuchung⁵ gezeigt, daß die Verhältnisswerte m/\bar{m} der aus der hierortigen und der üblichen Berechnung gefundenen Einspannmomente in der überwiegenden Mehrzahl der praktisch auftretenden Fälle nur in sehr geringem Ausmaß von der Belastungsart des Balkens abhängen; in

diesem Sinne gelten die Tabellen 1 bis 5 nicht nur für Gleichlast, sondern mit ausreichender Genauigkeit für beliebige Feldbelastung. Die Untersuchungen der Abschnitte 3 und 4 sind schließlich noch durch Angaben über die Stabsteifigkeiten und Übertragungsziffern für den nur durch Endmomente belasteten Balken zu ergänzen.

Für den Fall des „unbelasteten“ Endfeldes eines Durchlaufbalkens, der auch bei einem einerseits frei drehbar gelagerten, andererseits eingespannten (B) Rahmenstiel vorliegt, beträgt die Stabsteifigkeit in B

$$s_B = 0.7 \frac{B_B}{l}, \quad (19)$$

wenn das aufnehmbare Moment im Bereich A halb so groß angenommen wird, als im Bereich B der Einspannung ($M_A^* = 0.5 M_B^*$); Gl. (19) unterscheidet sich nur wenig vom Wert $s_B = 0.75 B/l$ der üblichen

Tabelle 6. Stabsteifigkeiten s_A, s_B und Übertragungsziffern v_A, v_B im unbelasteten Mittelfeld eines Durchlaufbalkens.

M_A^*, M_B^* ... aufnehmbare Momente in den Endquerschnitten.

$\frac{M_A^*}{M_B^*}$	1.0	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5
$\frac{s_A l}{B_A}$	1.00	1.01	1.02	1.03	1.04	1.05
$\frac{s_B l}{B_B}$	1.00	0.99	0.98	0.97	0.96	0.95
$v_A \leftarrow$	0.50	0.49	0.48	0.47	0.45	0.43
$v_B \rightarrow$	0.50	0.51	0.53	0.55	0.57	0.59

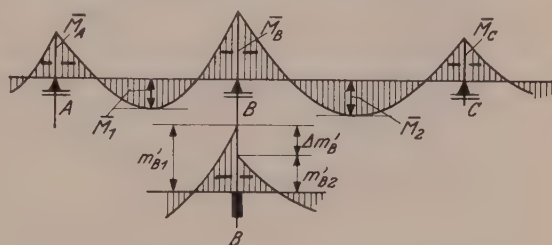


Abb. 3.

Momentenverteilung im Durchlaufbalken.

spannten Rahmenstiel vorliegt, können die Stabsteifigkeiten und Übertragungsziffern aus Tab. 6 entnommen werden, wobei im Sinne der in den Abschnitten 3 und 4 begründeten Einschränkungen auch hier $\min(M_A^*/M_B^*) = 0.5$ vorausgesetzt wird.

Der Einfluß der Bewehrung auf die Momente M in Durchlaufbalken kann durch das nachstehend beschriebene Iterationsverfahren erfaßt werden, welches von der dem üblichen Berechnungsverfahren (homogener Balken) entsprechenden Momentenlinie \bar{M} ausgeht. In Abb. 3 ist die Momentenlinie \bar{M} für zwei benachbarte Felder 1 und 2 eines Durchlaufbalkens mit den Momentengrößtwerten $M_A, \bar{M}_1, \bar{M}_B$ bzw. $\bar{M}_B, \bar{M}_2, \bar{M}_C$ dargestellt. Wählt man zunächst in erster Annäherung (1. Verbesserung) die aufnehmbaren Biegemomente M^* gleich diesen Werten \bar{M} ($M^* = \bar{M}$) und nimmt man im Sinne des Cross-Verfahrens in jedem Feld volle Einspannung an, so sind die den Verhältniswerten der Biegesteifigkeiten im Feld 1

$$\frac{M_1^*}{M_B^*} = \frac{\bar{M}_1}{|\bar{M}_B|}, \quad \frac{M_A^*}{M_B^*} = \frac{\bar{M}_A}{\bar{M}_B} \quad (20)$$

zugeordneten Einspannmomente m_{B1} und m_{A1} mittels der Tab. 3 und aus einer Tabelle für \bar{m}_{B1} bzw. \bar{m}_{A1} (volle Einspannung im homogenen Balken unveränderlichen Querschnitts, übliche Berechnung) zu bestimmen⁷; hierbei ist $M_A^* \leq M_B^*$ vorausgesetzt, das heißt mit M_B^* wird stets das größere Moment bezeichnet. Ebenso erhält man in

⁷ Vgl. z. B. R. Guldán: Rahmentragwerke und Durchlaufträger. Wien: Springer-Verlag. 1943. — K. Jäger: Festigkeitsnachweis im Stahlbetonbau, S. 248.

jedem beliebigen Feld die zugehörigen Einspannmomente als Funktion der aufnehmbaren Momente, wobei für ein Endfeld die Tab. 2 zu verwenden ist. Bezeichnet man die so ermittelten Voll-Einspannmomente der 1. Verbesserung mit m' , so ergibt sich über jeder Stütze eine Momentendifferenz $\Delta m'$, die z. B. bei B

$$\Delta m_B' = m_{B1}' + m_{B2}' \quad (21)$$

beträgt, wobei Momente im Uhrzeigersinn als positiv bezeichnet werden. Diese Momentendifferenzen werden nun gemäß dem Momentenausgleichsverfahren über den ganzen Balken solange verteilt, bis die Momentendifferenz in jedem Knoten (Auflager) verschwindet. Bei dieser Momentenverteilung werden die Stabsteifigkeiten s gemäß Tab. 4, 2 bzw. 6 und die Übertragungsziffern gemäß Tab. 5 bzw. 6 benötigt. Unter besonderen Umständen — verschiedene Balkenhöhen in zwei benachbarten Feldern und verschiedene Momentenaufnahmefähigkeit links und rechts vom Auflager — ist auch die Tab. 1 heranzuziehen. Aus dieser 1. Verbesserung (1. Schritt) werden Momente M' erhalten, deren Größe Aufschluß über die Fehler der üblichen Berechnung ergibt, weil zufolge Gl. (20) eine Bemessung auf Grund der Momente \bar{M} angenommen wurde. In jenen Querschnitten, für welche $M' > \bar{M}$ erhalten wird, ergibt sich eine entsprechende Herabsetzung des Sicherheitsgrades (Überbeanspruchung), in Querschnitten mit $M' < \bar{M}$ werden die Stahleinlagen nicht voll ausgenutzt (Unterbeanspruchung).

In weiterer Annäherung an das Ziel einer gleich großen Ausnutzung der Bewehrung in möglichst vielen Feld- und Stützquerschnitten könnten die aufnehmbaren Momente gleich den aus der 1. Verbesserung erhaltenen Werten gesetzt werden ($M^* = M'$) und man erhält dann für das Feld 1

$$\frac{M_1^*}{M_B^*} = \frac{M_1'}{|M_B'|}, \quad \frac{M_A^*}{M_B^*} = \frac{M_A'}{M_B'} \quad (22)$$

Man bestimmt weiterhin die zugehörigen Voll-Einspannmomente m'' , führt mit der jeweiligen Momentendifferenz, die über der Stütze B

$$\Delta m_B'' = m_{B1}'' + m_{B2}'' \quad (23)$$

beträgt, den Momentenausgleich durch und erhält schließlich die Momente M'' der 2. Verbesserung. Dieses Verfahren kann solange wiederholt werden, bis nach dem i -ten Schritt mit ausreichender Genauigkeit

$$M^i = M^* \quad (24)$$

in möglichst vielen Balkenquerschnitten erreicht ist. Die gleich große Ausnutzung der Stahleinlagen in jedem Feld- und Stützenquerschnitt ist nur dann möglich, wenn das Verhältnis der jeweilig maßgebenden Biegemomente in jedem Feld innerhalb des in den Tabellen abgegrenzten Bereiches der Verhältniswerte der aufnehmbaren Momente bleibt, das heißt wenn das Feldmoment mindestens 20% des größeren Stützmomentes bzw. das kleinere Stützmoment mindestens 50% des Feldmomentes beträgt; da die zugeordneten Bewehrungsverhältnisse praktisch immer vorhanden sind, erhält man durch das beschriebene Verfahren die wirtschaftlich beste Lösung bezüglich der Verteilung der Biegemomente.

Eine wesentliche Beschleunigung der Konvergenz des Verfahrens wird erreicht, wenn man den Ausgleich nicht mit den Werten M der üblichen Berechnung beginnt (Gl. 20), sondern von vorneherein einen entsprechend höher geschätzten Unterschied in den Biegesteifigkeiten bzw. in den aufnehmbaren Momenten M^* in Rechnung stellt. Im übrigen kann man sich mit einer Genauigkeit von etwa 5% begnügen und den Ausgleich in diesem Sinne bereits früher abbrechen. Jedenfalls führt aber schon

der 1. Schritt dieses Verfahrens auch unter Verwendung des Ansatzes Gl. (20) zu einer bedeutenden Herabsetzung der bei der üblichen Berechnung unvermeidlichen Fehler und damit zu einer Verbesserung der Momentenlinie.

Bei veränderlicher Last sind die den verschiedenen Lastfällen zugeordneten Momentengrößtwerte in den einzelnen Feldern und an den Stützen für die aufnehmbaren Momente M^* maßgebend und dem hier beschriebenen Verfahren zugrunde-zulegen.

6. Weitere Anwendungsmöglichkeiten.

Das gezeigte Verfahren ist grundsätzlich auch für die Berechnung von Stockwerks-rahmen mit geraden Riegeln geeignet, das heißt allgemein auf alle jene Tragwerke anwendbar, welche nach der Momentenverteilungsmethode von H. Cross bzw. von Th. Titze⁶ behandelt werden können. Bezüglich des Einflusses einer innerhalb eines Feldes veränderlichen Nutzhöhe ist die Anlage eigener Tabellen für die einzuführenden Einspannmomente, Stabsteifigkeiten und Übertragungsziffern erforderlich. Der Einfluß anderer Querschnittsformen (z. B. Plattenbalkenquerschnitt) muß ebenfalls in besonderen Tabellen festgelegt werden. Diese angeführten Ergänzungen werden vom Verfasser bereits durchgeführt und an anderer Stelle veröffentlicht werden.

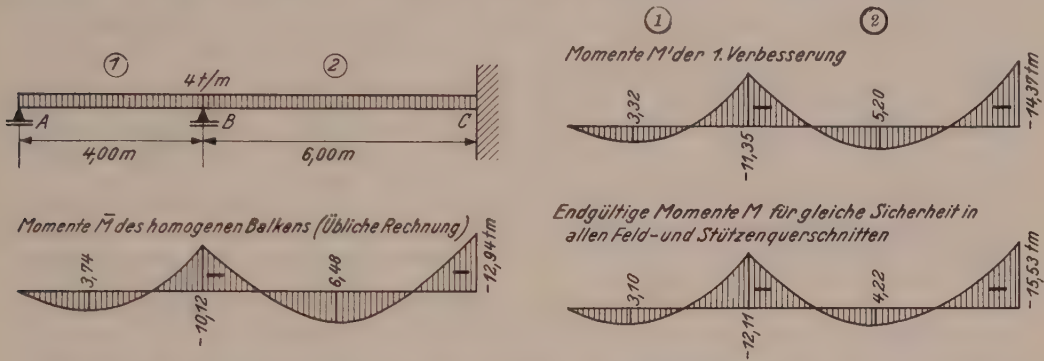


Abb. 4. Momentenverteilung für verschiedene Steifigkeitsverhältnisse (Zahlenbeispiel).

7. Zahlenbeispiel.

Es ist die Verteilung der Biegemomente in dem in Abb. 4 dargestellten, zweifach statisch unbestimmten Balken zu berechnen, der in A und B frei drehbar gelagert und in C fest eingespannt ist. Die Feldweiten sind $l_1 = 4$ m, $l_2 = 6$ m, die Belastung beträgt 4 t/m und der Rechteckquerschnitt ist über die ganze Balkenlänge unveränderlich.

a) Übliche Berechnung als homogener Balken.

Die Ermittlung der Stützmomente wird mittels des Cross-Verfahrens durchgeführt. Die Voll-Einspannmomente der beiden Felder betragen

$$\bar{m}_{B1} = \frac{1}{8} \cdot 4 \cdot 00 \cdot 4 \cdot 00^2 = 8 \cdot 00 \text{ tm}, \quad \bar{m}_{B2} = -\bar{m}_{C2} = -4 \cdot 00 \cdot 6 \cdot 00^2 = -12 \cdot 00 \text{ tm}.$$

Da die Biegesteifigkeit hier als konstant angesehen wird, ist die Stabsteifigkeit des Stabes 1 in B durch $\bar{s}_{B1} = 0.75 B/l_1$ und die Stabsteifigkeit des Stabes 2 in B durch $\bar{s}_{B2} = B/l_2$ gegeben. Man erhält daher $\bar{s}_{B1}/\bar{s}_{B2} = 1.12$, die Übertragungsziffer nach C beträgt $v_C = 0.50$. Die Stabknotenwerte in B sind $\bar{k}_{B1} = 1.12/(1.12 + 1.00) = 0.53$ und $\bar{k}_{B2} = 1 - k_{B1} = 0.47$.

Die Momentendifferenz im Knoten B beträgt $\Delta \bar{m}_B = 8 \cdot 00 - 12 \cdot 00 = -4 \cdot 00$ tm und ist gemäß den Stabknotenwerten zu verteilen. Man erhält $\Delta \bar{m}_{B1} = -\bar{k}_{B1} \Delta \bar{m}_B =$

= 2·12 tm, $\Delta \bar{m}_{B2} = -\bar{k}_{B2} \Delta \bar{m}_B = 1·88$ tm und $\Delta \bar{m}_{C2} = -v_C \Delta \bar{m}_{B2} = 0·94$ tm. Der Ausgleich ist in dem Schema der Abb. 5 dargestellt und führt zu den Stützmomenten $\bar{M}_B = -10·12$ tm, $\bar{M}_C = -12·94$ tm und den Feldmomenten $\bar{M}_1 = 3·74$ tm, $\bar{M}_2 = 6·48$ tm. Der Unterschied zwischen den Feld- und Stützmomenten ist also hier recht erheblich (Abb. 4), so daß der Unterschied in den Biegesteifigkeiten nicht vernachlässigbar ist.

b) Erste Verbesserung auf Grund der Ergebnisse a).

Es wird angenommen, daß die Bemessung mit den Biegemomenten \bar{M} durchgeführt wird; dann entsprechen diese Werte den aufnehmbaren Momenten M^* und

B				C			Anmerkung
$\frac{s_{B1}}{s_{B2}}$	k_{B1}	$\sum \frac{s_B}{s_{B2}}$	k_{B2}	$\frac{s_{B2}}{s_{B1}}$	v_B	v_C	
1·12	0·53	2·12	0·47	1·00	0·50	0·50	Ausgleich für den homogenen Balken, Momente \bar{M} .
	8·00		— 12·00			12·00	
	2·12		1·88		→	0·94	
	10·12		— 10·12			12·94	
0·92	0·48	1·92	0·52	1·00		0·59	Ausgleich für die 1. Verbesserung, Momente M' .
	10·08		— 12·72			13·56	
	1·27		1·37		→	0·81	
	11·35		— 11·35			14·37	
0·93	0·48	1·93	0·52	1·00		0·67	Endgültiger Ausgleich, Momente M für gleiche Sicherheit.
	10·88		— 13·44			14·64	
	1·23		1·33		→	0·89	
	12·11		— 12·11			15·53	

Abb. 5. Momentenausgleich für das Zahlenbeispiel.

es werden nachstehend die Momente M' unter Berücksichtigung der nun bekannten Verhältniswerte $M_1^*/M_B^* = 3·74/10·12 = 0·37$, $M_2^*/M_C^* = 6·48/12·94 = 0·50$ und $M_B^*/M_C^* = 10·12/12·94 = 0·78$ der aufnehmbaren Momente bestimmt. Aus Tab. 2 folgt $m_{B1}' = 1·26 \bar{m}_{B1} = -1·26 \cdot 8·00 = 10·08$ tm, $s_{B1}' = 0·55 B_{B1}/l_1$. Aus Tab. 3 erhält man $m_{B2}' = 1·06 \bar{m}_{B2} = -1·06 \cdot 12·00 = -12·72$ tm, $m_{C2}' = 1·13 \bar{m}_{C2} = 1·13 \cdot 12·00 = 13·56$ tm. Die Steifigkeit des Stabes 2 im Knoten B ergibt sich aus Tab. 4 zu $s_{B2}' = 0·90 B_{B2}/l_2$, die Übertragungsziffer nach C beträgt laut Tab. 5 $v_C' = 0·59$. Da an der Stütze B die Bewehrung für beide Felder gleich groß ist, gilt $B_{B1} = B_{B2}$ und $s_{B1}'/s_{B2}' = 0·92$. Die Stabknotenwerte in B sind daher $k_{B1}' = 0·92/1·92 = 0·48$, $k_{B2}' = 1 - 0·48 = 0·52$.

Die Momentendifferenz in B beträgt $\Delta m_B' = 10·08 - 12·72 = -2·64$ tm und der Ausgleich führt zu $\Delta m_{B1}' = 0·48 \cdot 2·64 = 1·27$ tm, $\Delta m_{B2}' = 0·52 \cdot 2·64 = 1·37$ tm, $\Delta m_{C2}' = 0·59 \cdot 1·37 = 0·81$ tm (vgl. Abb. 5). Damit erhält man die Momentenlinie M' gemäß Abb. 4 mit den Stützmomenten $M_B' = -11·35$ tm, $M_C' = -14·37$ tm und den Feldmomenten $M_1' = 3·32$ tm, $M_2' = 5·20$ tm. Vergleicht man die so gefundenen Ergebnisse mit den Werten der üblichen Berechnung, so gilt

$$M_B' = 1·12 \bar{M}_B, M_C' = 1·11 \bar{M}_C, M_1' = 0·89 \bar{M}_1, M_2' = 0·80 \bar{M}_2,$$

und das bedeutet, daß auf Grund der üblichen Bemessung die Stahleinlagen in B bzw. C um 12% bzw. 11% überbeansprucht, dagegen in den maßgebenden Quer-

schnitten der Felder 1 bzw. 2 um 11% bzw. 20% unterbeansprucht sind; damit sinkt die auf die Traglast (kritischer Zustand) bezogene Sicherheit des Balkens um 12% gegenüber dem Sollwert. Die Unterschiede zwischen Stützmomenten und Feldmomenten sind noch größer geworden: $M_1'/|M_B'| = 0.29$, $M_2'/|M_C'| = 0.36$. Man könnte nun z. B. die Feldbewehrung gemäß den Momenten \bar{M}_1 und M_2 belassen und nur die Bewehrung an den Stützen gemäß den neuen Momenten M_B' und M_C' erhöhen; damit wird zwar die Überbeanspruchung an den Stützen relativ kleiner, dagegen die Unterbeanspruchung der Feldbewehrungen noch größer, das heißt dieser Vorgang wäre unwirtschaftlich, weil er den Gesamtverbrauch an Stahl erhöht. Im vorliegenden Falle kann aber in allen für die Bemessung maßgebenden Querschnitten eine gleich große Ausnutzung der Stahleinlagen durch weitere Iteration erreicht werden.

c) Endgültige Momente.

Die nachstehende Annahme für die Verhältnismomente der aufnehmbaren Biegemomente $M_1^*/M_B^* = 0.26$, $M_2^*/M_C^* = 0.27$, $M_B^*/M_C^* = 0.78$ führt schließlich zum gewünschten Ziel einer in allen Querschnitten gleich hohen Stahlbeanspruchung.

Aus Tab. 2 folgt $m_{B1} = 1.36$, $\bar{m}_{B1} = 1.36 \cdot 8.00 = 10.88$ tm und $s_{B1} = 0.50$ B_{B1}/l_1 . Aus Tab. 3 ergibt sich $m_{B2} = 1.12$, $\bar{m}_{B2} = -1.12 \cdot 12.00 = -13.44$ tm, $m_{C2} = 1.22$, $\bar{m}_{C2} = 1.22 \cdot 12.00 = 14.64$ tm. Aus Tab. 4 erhält man $s_{B2} = 0.81$ B_{B2}/l_2 und aus Tab. 5 findet man die Übertragungsziffer zum Knoten C zu $v_C = 0.67$. Mit $B_{B1} = B_{B2}$ und $s_{B1}/s_{B2} = 0.93$ betragen die Stabknotenwerte in B ... $k_{B1} = 0.93/1.93 = 0.48$ und $k_{B2} = 1 - 0.48 = 0.52$.

Die Momentendifferenz in B ist $\Delta m_B = 10.88 - 13.44 = -2.56$ tm und der Ausgleich führt zu $\Delta m_{B1} = 0.48 \cdot 2.56 = 1.23$ tm, $\Delta m_{B2} = 0.52 \cdot 2.56 = 1.33$ tm, $\Delta m_{C2} = 0.67 \cdot 1.33 = 0.89$ tm (vgl. Abb. 5).

Damit erhält man die nachstehenden Momentengrößtwerte:

$$M_B = -12.11 \text{ tm}, M_C = -15.53 \text{ tm}, M_1 = 3.10 \text{ tm}, M_2 = 4.22 \text{ tm}.$$

Die Verhältnismomente der charakteristischen Momente betragen somit $M_1/|M_B| = 0.26$, $M_2/|M_C| = 0.27$, $M_B/M_C = 0.78$ und stimmen genau mit den angenommenen Verhältnismomenten der aufnehmbaren Biegemomente überein. Legt man die obigen Momente der Bemessung zugrunde (Verteilung gemäß Abb. 4), so können die Stahleinlagen nunmehr in allen maßgebenden Querschnitten voll ausgenutzt werden. Die Abweichungen dieser Momente gegenüber den Werten der üblichen Berechnung betragen

$$M_B = 1.20 \bar{M}_B, M_C = 1.20 \bar{M}_C, M_1 = 0.83 \bar{M}_1, M_2 = 0.65 \bar{M}_2,$$

und sie sind meines Erachtens groß genug, um den erhöhten Rechenaufwand zu rechtfertigen. Im vorliegenden Falle ergibt sich zufolge der nicht unerheblichen Senkung der Feldmomente insgesamt ein kleinerer Stahlbedarf als nach der üblichen Berechnung und außerdem der Vorteil der unverminderten und gleich großen Sicherheit.

8. Zusammenfassung.

Das beschriebene Verfahren zur verschärften Berechnung der Biegemomente in statisch unbestimmten Balken aus Stahlbeton berücksichtigt die Verteilung der Stahleinlagen; es geht von der Momentenlinie des homogenen Balkens aus und gestattet durch wiederholte Iteration eine beliebig steigerbare Genauigkeit in der Erfassung der veränderlichen Biegesteifigkeit, die durch das aufnehmbare Biegemoment M^* dargestellt wird. Das Ziel der gleich hohen Stahlbeanspruchung bzw. des gleich großen Sicherheitsgrades ist erreicht, wenn die so berechneten Biege-

momente mit den geschätzten aufnehmbaren Momenten übereinstimmen ($M = M^*$). Durch diese Formulierung sind die Ergebnisse von der Bemessungsart selbst unabhängig, das heißt für die Bemessung kann sowohl das Traglastverfahren als auch das n -Verfahren herangezogen werden. Bei der Anwendung dieses werkstoffgerechten und daher genaueren Verfahrens könnte außerdem eine Ermäßigung des Sicherheitsgrades um etwa 10% in Erwägung gezogen werden; aber auch ohne diese Maßnahme wird sich die Mehrarbeit an statischer Berechnung in vielen Fällen durch eine Stahlersparnis lohnen.

(Eingegangen am 28. Dezember 1951.)

Allgemeine Stabilitätsbedingung für krumme Stäbe.

Von W. Raher, Wien.

Mit 3 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Die von P. Funk gegebene Stabilitätstheorie für gerade Stäbe wird auf ursprünglich krumme Stäbe erweitert. Für die zweite Variation der Deformationsenergie krummer Stäbe wird eine allgemeine Formel angegeben, die als Ausgangspunkt für verschiedenste Stabilitätsprobleme aufzufassen ist. Die praktische Durchführung des Lösungsganges wird am Beispiel der Achterbildung von geschlossenen Kreisringen gezeigt. Bei Speichenrädern kann der Einfluß der Biegesteifigkeit der Speichen auf die Stabilität des Rades abgeschätzt werden.

Summary. The stability theory of straight bars as developed by P. Funk is extended by the author to originally curved beams. For the second variation of the deformation energy of curved beams a general formula is given which may be regarded as a starting point for stability problems of various kinds. Solving the problem practically is shown by means of an example dealing with the eights formed by a closed circular ring. When dealing with spoke wheels, the influence of the bending stiffness of the spokes on the stability of the wheel may be estimated.

Résumé. La théorie de stabilité des barres rectilignes comme elle a formulé P. Funk est élargie par l'auteur des barres courbes au début. Pour la seconde variation de l'énergie de déformation des barres courbes l'auteur donne une formule générale, pouvant être regardée comme point de départ pour les problèmes de stabilité les plus divers. La solution pratique est démontrée par l'exemple des anneaux circulaires déformés en « huit ». Dans les roues avec rais, on peut estimer l'influence de la rigidité de flexion des rais sur la stabilité de la roue.

Abgrenzung.

Die Beurteilung der Stabilität einer Gleichgewichtslage eines ursprünglich krummen Stabes soll auf ein rein mathematisches Problem zurückgeführt werden. Die Aufgabe ist als gelöst zu betrachten, wenn für die zweite Variation der Deformationsenergie krummer Stäbe eine allgemeine Formel angegeben werden kann. Die Schwierigkeiten bei der Herleitung liegen in der Unübersichtlichkeit der Gleichungen, sie sind jedoch genau wie beim Kreiselpproblem durch Einführung von Quasikoordinaten zu umgehen.

Die Heranziehung von Quasikoordinaten zur Lösung von Gleichgewichtsproblemen dünner Stäbe (1. Variation) findet man im Prinzip bereits in Kirchhoffs Vorlesungen über Mechanik, eine strenge Theorie bis zur zweiten Variation des Energieausdruckes gab P. Funk¹ im Jahre 1946. Die vorliegende Arbeit stellt eine Erweiterung dieser Theorie auf Stäbe dar, deren Zentrallinie im ungespannten Zustand Krümmung und Drall besitzt.

¹ P. Funk: Stabilitätstheorie bei Stäben unter Druck und Drillung. Österr. Ingenieur-Arch. 1, 2 (1946). Eine ausführliche Behandlung findet sich in der Arbeit „Über die Verwendung von Quasikoordinaten in der Variationsrechnung“ von P. Funk (derzeit noch nicht veröffentlicht).

Kinematik dünner Stäbe.

Die Wiederholung der kinematischen Formeln² soll gleichzeitig mit der im weiteren verwendeten Bezeichnungsweise bekanntmachen.

Die Zentrallinie des unbelasteten Stabes sei eine Kurve von konstanter Krümmung und konstantem Drall. Wir denken uns in jedem ihrer Punkte P ein orthogonales Dreibein (P, XYZ) errichtet, dessen Z -Achse mit der Tangente an die Zentrallinie zusammenfalle. Die X - und Y -Achse sind in Richtung der Querschnittshauptachsen so orientiert, daß die Achsenfolge einem Rechtssystem entspricht. Der Punkt p , in welchen P bei Belastung verschoben wird, ist Ausgangspunkt des Systems der Torsion-Biegungshauptachsen (p, xyz) , welches wir mit dem Dreibein (P, XYZ) durch folgendes Schema verknüpfen:

	x	y	z
X	α_1	α_2	α_3
Y	β_1	β_2	β_3
Z	γ_1	γ_2	γ_3

(1)

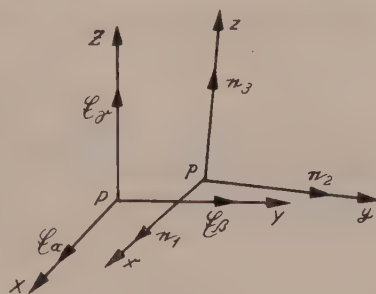


Abb. 1.

Die Komponentenzerlegung eines Vektors in bezug auf das System (P, XYZ) sei durch Großbuchstaben, bezüglich (p, xyz) durch Kleinbuchstaben gekennzeichnet. Zeilen- und Spaltenvektoren von (1) lauten daher:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_1 &= (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) & e_1 &= (1, 0, 0), \\ \dots & & \dots & \\ \mathfrak{E}_\alpha &= (1, 0, 0) & e_\alpha &= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3). \\ \dots & & \dots & \end{aligned}$$

Es bestehen dann die bekannten Orthogonalitätsrelationen und für einen beliebigen Vektor Gleichungen von der Form

$$\begin{aligned} \mathfrak{W} &= \mathfrak{E}_\alpha (w e_\alpha) + \mathfrak{E}_\beta (w e_\beta) + \mathfrak{E}_\gamma (w e_\gamma), \\ w &= e_1 (\mathfrak{W} \mathfrak{E}_1) + e_2 (\mathfrak{W} \mathfrak{E}_2) + e_3 (\mathfrak{W} \mathfrak{E}_3). \end{aligned} \quad (2)$$

Wir nehmen an, der Anfangspunkt P des Systems (XYZ) bewege sich längs der unverzerrten Zentrallinie mit der Geschwindigkeit eins ($s = t$). Die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit des Dreikants, bezogen auf die jeweiligen Lagen der Achsen, seien $\mathfrak{W}_1^0, \mathfrak{W}_2^0, \mathfrak{W}_3^0$, wobei die hochgestellte Null den unbelasteten Zustand zum Ausdruck bringen soll. Die analogen Größen für den belasteten Stab (Komponenten der Winkelgeschwindigkeit des Systems (xyz) , bezogen auf die instantanen Lagen dieser Achsen) lauten dann in der eingeführten Bezeichnungsweise w_1, w_2, w_3 . Die Gleichungen

$$\frac{\partial \mathfrak{E}_1}{\partial s} = (\mathfrak{W} - \mathfrak{W}^0) \times \mathfrak{E}_1, \quad (3)$$

$$\frac{\partial e_\alpha}{\partial s} = - (w - w^0) \times e_\alpha \quad (3')$$

² A. E. H. Love: Lehrbuch der Elastizität, S. 509 ff.

Fassen wir die zu den Nebenbedingungen gehörigen Lagrangeschen Faktoren wie folgt zusammen

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{E}_\alpha A_1 + \mathfrak{E}_\beta A_2 + \mathfrak{E}_\gamma A_3 = (A_1, A_2, A_3),$$

so lautet unser Variationsproblem

$$\Phi = \Phi_A + \int \left\{ \frac{1}{2} [A_1 (w_1 - \mathfrak{W}_1^0)^2 + A_2 (w_2 - \mathfrak{W}_2^0)^2 + A_3 (w_3 - \mathfrak{W}_3^0)^2] + \right. \\ \left. + \mathfrak{L} [\mathfrak{E}_\gamma + \mathfrak{H}' + (\mathfrak{B}^0 \times \mathfrak{H}) - \mathfrak{E}_3] \right\} ds \rightarrow \text{Min.}! \quad (6)$$

Anmerkung: Die Bedingung $\mathfrak{E}_3 \mathfrak{E}_3 = 1$ führt nach (5') bei Vernachlässigung von Größen zweiter Ordnung auf die Gleichung

$$\frac{\partial Z}{\partial s} + \mathfrak{W}_1^0 Y - \mathfrak{W}_2^0 X = 0,$$

welche ausdrückt, daß wir undeformbare Bogenelemente anzunehmen haben (s. oben). Diese Forderung steht im Einklang mit den üblichen Annahmen in der Elastizitätstheorie dünner Stäbe.

Die in jedem Punkte der ungespannten Zentrallinie errichteten Systeme (P, XYZ) können durch ein einziges raumfestes ersetzt werden, wenn der Stab im unbelasteten Zustand weder Krümmung noch Drill besitzt. Die Nebenbedingungen in diesem Falle

$$\alpha_3 = \frac{\partial X}{\partial s}; \quad \beta_3 = \frac{\partial Y}{\partial s}; \quad \gamma_3 = \frac{\partial Z}{\partial s}$$

stimmen mit (5') für $\mathfrak{B}^0 = 0$ bis auf den Summanden 1 in der dritten der Gleichungen überein. Somit tritt in den Formeln für erste und zweite Variation kein Unterschied auf.

Quasikoordinaten und Übergangsgleichungen.

Bei Bildung der Variation von (6) denken wir uns w_1, w_2, w_3 nach Gl. (4) durch die Richtungskosinus ausgedrückt, welche wir als Funktionen der Bogenlänge s und eines Variationsparameters ε aufzufassen haben. Da von den neun Größen $\alpha_1, \dots, \gamma_3$ bekanntlich nur drei voneinander unabhängig sind, bekämen wir zu den Nebenbedingungen (5') noch sechs weitere hinzu; es empfiehlt sich daher die Einführung allgemeiner Koordinaten.

Lagrange zog vorerst zur Lösung des Kreiselproblems (wir werden später zeigen, daß dieses mit der hier vorliegenden Aufgabe durch eine weitgehende formale Analogie verknüpft ist) die Eulerschen Winkel als allgemeine Koordinaten heran, fand jedoch die äußere Form der Bewegungsgleichungen sehr unklar und daher unbefriedigend.

Die durch Einführung der Eulerschen Winkel bedingte Unsymmetrie der Gl. (4) würde auch in unserem Falle zu unübersichtlichen und praktisch unbrauchbaren Ausdrücken führen.

In der zweiten Auflage seiner *Mécanique analytique* zeigt Lagrange eine andere Methode auf, die in der Verwendung sogenannter Quasikoordinaten besteht und eine klare Herleitung der Bewegungsgleichungen gestattet. Nicht mehr die Koordinaten selbst werden durch voneinander unabhängige Größen ausgedrückt, sondern lineare Funktionen der Koordinaten und ihrer Ableitungen, wie sie z. B. durch (4) gegeben sind³. Da die Ausdrücke $w_1 ds, w_2 ds, w_3 ds$ keine vollständigen Differentiale darstellen, müssen ihre Integrale wegababhängig sein, also abhängig von der Wahl der Funktionen $\alpha_1, \dots, \gamma_3$. Somit können diese Integrale als neue Koordinaten, Quasikoordinaten, zur Beschreibung eines Systemzustandes Verwendung finden.

Zur Klarstellung sei hervorgehoben, daß man oft Quasikoordinaten dort einführt, wo es gilt, nichtholonome Bedingungsgleichungen formal zu beseitigen (daher auch

³ G. Prange: Die allgemeinen Integrationsmethoden der analytischen Mechanik. Enzyklopädie d. math. Wissensch., Bd. IV/2, S. 505. — G. Hamel: Über die virtuellen Verschiebungen in der Mechanik. Mathem. Ann. 59, 416 (1904).

die Bezeichnung „nichtholonome generalisierte Koordinaten“). Hingegen wird hier bei holonomen Nebenbedingungen versucht, durch Einführung von Quasikoordinaten Vereinfachungen in analytischer Hinsicht zu erzielen.

Die Vertauschbarkeit von Differentiations- und Variationssymbol verliert bei Quasikoordinaten ihre Gültigkeit; sie muß durch eine Vertauschungsrelation oder Übergangsgleichung ersetzt werden, die wir im folgenden herleiten.

Da selbstverständlich \mathfrak{w}^0 , keineswegs aber \mathfrak{W}^0 als Funktion von ε aufzufassen ist, führen wir Variationsgrößen von der Form

$$\begin{aligned}\check{w}_1 &= \mathfrak{E}_3 \frac{\partial \mathfrak{E}_2}{\partial \varepsilon}, \\ \check{w}_2 &= \mathfrak{E}_1 \frac{\partial \mathfrak{E}_3}{\partial \varepsilon}, \\ \check{w}_3 &= \mathfrak{E}_2 \frac{\partial \mathfrak{E}_1}{\partial \varepsilon}\end{aligned}\quad (7)$$

ein, deren Bedeutung die Bezeichnung Winkelvariationen nahelegt. Diese Größen sind auch aus folgenden Gleichungen entstanden zu denken:

$$\frac{\partial \mathfrak{E}_1}{\partial \varepsilon} = \check{\mathfrak{W}} \times \mathfrak{E}_1, \quad (8)$$

.....

$$\frac{\partial e_\alpha}{\partial \varepsilon} = - \mathfrak{w} \times e_\alpha. \quad (9)$$

.....

Die Systeme (8) und (9) geben die Änderung wieder, welche die Vektoren \mathfrak{E}_1, \dots erleiden, wenn wir bei festgehaltener Bogenlänge in der einparametrischen Schar der Zentrallinien vom Parameter ε auf $\varepsilon + d\varepsilon$ übergehen.

Zunächst folgt aus (4) und (7) durch Differentiation

$$\frac{\partial w_1}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial \check{w}_1}{\partial s} = \frac{\partial \mathfrak{E}_3}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \mathfrak{E}_2}{\partial s} - \frac{\partial \mathfrak{E}_3}{\partial s} \frac{\partial \mathfrak{E}_2}{\partial \varepsilon} + \mathfrak{W}^0 \frac{\partial \mathfrak{E}_1}{\partial \varepsilon}.$$

Die Differentialquotienten der Richtungskosinus durch (3) bzw. (8) ausgedrückt

$$\begin{aligned}\frac{\partial w_1}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial \check{w}_1}{\partial s} &= (\check{\mathfrak{W}} \times \mathfrak{E}_3) [(\mathfrak{W} - \mathfrak{W}^0) \times \mathfrak{E}_2] + \mathfrak{W}^0 (\check{\mathfrak{W}} \times \mathfrak{E}_1) - \\ &\quad - (\check{\mathfrak{W}} \times \mathfrak{E}_2) [(\mathfrak{W} - \mathfrak{W}^0) \times \mathfrak{E}_3].\end{aligned}$$

Nach geeigneter Umformung der Produkte und zyklischer Vertauschung erhalten wir die Übergangsgleichung in vektorieller Gestalt

$$\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial \varepsilon} - \frac{\partial \check{\mathfrak{w}}}{\partial s} = \mathfrak{w} \times \check{\mathfrak{w}}. \quad (10)$$

Die durch \mathfrak{W}^0 gegebene Form der ungespannten Zentrallinie geht somit in die Vertauschungsrelation nicht ein. Es sei darauf hingewiesen, daß (10) als Integrabilitätsbedingung von (3') und (9) aufzufassen ist und daher auch von diesen Gleichungen ausgehend hergeleitet werden kann.

Erste Variation. Gleichgewichtsbedingungen.

Mit der Übergangsgleichung (10) bilden wir die erste Variation des Energieausdruckes (6)

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon} &= \frac{\partial \Phi_A}{\partial \varepsilon} + \int_{(A)} \left\{ \left[A_1 (w_1 - \mathfrak{w}_1^0) \frac{\partial w_1}{\partial \varepsilon} + A_2 (w_2 - \mathfrak{w}_2^0) \frac{\partial w_2}{\partial \varepsilon} + A_3 (w_3 - \mathfrak{w}_3^0) \frac{\partial w_3}{\partial \varepsilon} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \mathfrak{Q} \left[\frac{\partial \mathfrak{R}'}{\partial \varepsilon} + \left(\mathfrak{W}^0 \times \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \varepsilon} \right) - \frac{\partial \mathfrak{E}_3}{\partial \varepsilon} \right] \right\} ds.\end{aligned}$$

Nach Zusammenfassung der Biegemomente und des Torsionsmomentes zum Deformationsmomentenvektor

$$m_d = e_1 A_1 (w_1 - \mathfrak{w}_1^0) + e_2 A_2 (w_2 - \mathfrak{w}_2^0) + e_3 A_3 (w_3 - \mathfrak{w}_3^0)$$

erhalten wir mit (10) und (8)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial \Phi_A}{\partial \varepsilon} + \int_{(l)} \left\{ m_d \left[\frac{\partial \check{\mathfrak{w}}}{\partial s} + (\mathfrak{w} \times \check{\mathfrak{w}}) \right] + \mathfrak{L} \left[\frac{\partial \mathfrak{R}'}{\partial \varepsilon} + (\mathfrak{W}^0 \times \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \varepsilon}) - (\check{\mathfrak{W}} \times \mathfrak{E}_3) \right] \right\} ds.$$

Nach partieller Integration und Einführung der Umformung [mit (2)]

$$\mathfrak{L} (\check{\mathfrak{W}} \times \mathfrak{E}_3) = \check{\mathfrak{w}} [e_2 (\mathfrak{L} \mathfrak{E}_1) - e_1 (\mathfrak{L} \mathfrak{E}_2)]$$

nimmt die erste Variation von (6) die Gestalt an

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon} &= \frac{\partial \Phi_A}{\partial \varepsilon} + \left[m_d \check{\mathfrak{w}} + \mathfrak{L} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \varepsilon} \right]_1^2 - \\ &- \int_{(l)} \left\{ [m_d' + (\mathfrak{w} \times m_d) + e_2 (\mathfrak{L} \mathfrak{E}_1) - e_1 (\mathfrak{L} \mathfrak{E}_2)] \check{\mathfrak{w}} + [\mathfrak{L}' + (\mathfrak{W}^0 \times \mathfrak{L})] \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \varepsilon} \right\} ds. \end{aligned} \quad (11)$$

Denken wir uns den Stab durch Kräfte und Momente, die nur an seinen Enden wirken, belastet, so wird Φ_A eine Funktion lediglich der Randglieder von $X, Y, Z, \alpha_1, \dots, \gamma_3$ sein. Wir erreichen dann das Verschwinden des Integrals in (11) durch Nullsetzen der Koeffizienten der willkürlichen Variationsgrößen $\check{\mathfrak{w}}$ und $\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \varepsilon}$.

Die so gefundenen Gleichgewichtsbedingungen lauten⁴

$$m_d' + (\mathfrak{w} \times m_d) = -e_2 (\mathfrak{L} \mathfrak{E}_1) + e_1 (\mathfrak{L} \mathfrak{E}_2), \quad (12)$$

$$\mathfrak{L}' + (\mathfrak{W}^0 \times \mathfrak{L}) = 0; \quad (13)$$

in Komponentenzerlegung.

$$A_1 w_1' - A_2 (w_2 - \mathfrak{w}_2^0) w_3 + A_3 (w_3 - \mathfrak{w}_3^0) w_2 = A_1 \alpha_2 + A_2 \beta_2 + A_3 \gamma_2,$$

$$A_2 w_2' - A_3 (w_3 - \mathfrak{w}_3^0) w_1 + A_1 (w_1 - \mathfrak{w}_1^0) w_3 = -A_1 \alpha_1 - A_2 \beta_1 - A_3 \gamma_1,$$

$$A_3 w_3' - A_1 (w_1 - \mathfrak{w}_1^0) w_2 + A_2 (w_2 - \mathfrak{w}_2^0) w_1 = 0,$$

$$A_1' + \mathfrak{w}_2^0 A_3 - \mathfrak{w}_3^0 A_2 = 0,$$

$$A_2' + \mathfrak{w}_3^0 A_1 - \mathfrak{w}_1^0 A_3 = 0,$$

$$A_3' + \mathfrak{w}_1^0 A_2 - \mathfrak{w}_2^0 A_1 = 0.$$

Die bei Integration von (12) und (13) auftretenden Konstanten sind durch die Art der Einspannung (erzwungene Randwerte) und durch die Bedingung festgelegt, daß die Randglieder in (11) verschwinden müssen (freie Randbedingungen).

Die Bedeutung der Lagrangeschen Faktoren als Komponenten des Kraftvektors tritt in obigen Gleichungen unmittelbar hervor. Wir hätten dieses Ergebnis auch aus (6) bei Verwendung der Hamiltonschen Formeln herleiten können.

Bevor wir zur Bildung der zweiten Variation übergehen, sei auf eine zumindest für die Koordinatenwahl bemerkenswerte Tatsache hingewiesen. Die Gleichgewichtsbedingungen für den ursprünglich geraden Stab

$$m_d' + (\mathfrak{w} \times m_d) = -e_2 (\mathfrak{L} \mathfrak{E}_1) + e_1 (\mathfrak{L} \mathfrak{E}_2),$$

$$m_d = (A_1 w_1, A_2 w_2, A_3 w_3), \quad \mathfrak{L} = \text{konst.}$$

stimmen formal mit den Euler-Lagrangeschen Bewegungsgleichungen eines in einem Punkte festgehaltenen starren Körpers überein, wenn wir A_1, A_2, A_3 als Trägheits-

⁴ A. E. H. Love: L. c., S. 461.

momente in bezug auf die Hauptachsen im Aufhängepunkt und die in (12) rechts stehenden Glieder als Moment der Schwerkraft auffassen. Diese Übereinstimmung ist in der Literatur unter dem Namen Kirchhoffsche Analogie näher ausgeführt⁵. J. Larmor⁶ fand durch allgemeinere Formulierung die Ausdehnung der kinetischen Analogie auf Stäbe, deren Zentrallinie im ungespannten Zustand Krümmung und Drall besitzt, sofern nur die Größen \mathfrak{M}_1^0 , \mathfrak{M}_2^0 , \mathfrak{M}_3^0 konstant sind.

Wir verstehen jetzt, daß verschiedene, in der Dynamik starrer Körper bewährte Methoden bzw. Koordinaten zur Lösung von Problemen des elastischen Gleichgewichtes dünner Stäbe herangezogen werden. Neben der Verwendung von Eulerschen Winkel und Quasikoordinaten in beiden Gebieten sei auf die heute in der Dynamik gebräuchliche Motorrechnung von R. v. Mises hingewiesen, die ebenfalls in der Elastizitätstheorie dünner Stäbe Anwendung fand⁷.

Zweite Variation. Allgemeine Stabilitätsbedingung.

In die zweite Variation des Energieausdruckes (6)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon^2} = & \frac{\partial^2 \Phi_A}{\partial \varepsilon^2} + \int_{(l)} \left\{ \frac{\partial m_d}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial \varepsilon} + m_d \frac{\partial^2 \mathfrak{w}}{\partial \varepsilon^2} + \frac{\partial \Omega}{\partial \varepsilon} \left[\frac{\partial \mathfrak{R}'}{\partial \varepsilon} + \left(\mathfrak{W}^0 \times \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \varepsilon} \right) - (\mathfrak{W} \times \mathfrak{G}_3) \right] + \right. \\ & \left. + \Omega \left[\frac{\partial^2 \mathfrak{R}'}{\partial \varepsilon^2} + \left(\mathfrak{W}^0 \times \frac{\partial^2 \mathfrak{R}}{\partial \varepsilon^2} \right) - \left(\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial \varepsilon} \times \mathfrak{G}_3 \right) - \left(\mathfrak{W} \times \frac{\partial \mathfrak{G}_3}{\partial \varepsilon} \right) \right] \right\} ds \end{aligned} \quad (14)$$

führen wir zunächst die aus (10) folgende Beziehung

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{w}}{\partial \varepsilon^2} = \frac{\partial^2 \mathfrak{w}}{\partial \varepsilon \partial s} + \left(\mathfrak{w} \times \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial \varepsilon} \right) + \left(\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial s} \times \mathfrak{w} \right) + (\mathfrak{w} \mathfrak{w}) \mathfrak{w} - (\mathfrak{w})^2 \mathfrak{w}$$

ein. Nach partieller Integration und geeigneter Umformung lautet (14)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon^2} = & \frac{\partial^2 \Phi_A^{(1)}}{\partial \varepsilon^2} + \int_{(l)} \left\{ \sum_{1,2,3} A_1 \left(\frac{\partial \mathfrak{w}_1}{\partial s} + \left| \frac{w_3}{\check{w}_2} \frac{w_3}{\check{w}_3} \right|^2 \right) + m_d \left(\frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial s} \times \mathfrak{w} \right) + \right. \\ & + (\mathfrak{w} \times \mathfrak{w}) (m_d \times \mathfrak{w}) + \frac{\partial \Omega}{\partial \varepsilon} \left[\frac{\partial \mathfrak{R}'}{\partial \varepsilon} + \left(\mathfrak{W}^0 \times \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \varepsilon} \right) - \check{w}_2 \mathfrak{G}_1 + \check{w}_1 \mathfrak{G}_2 \right] - \\ & \left. - \Omega [\check{w}_1 \check{w}_3 \mathfrak{G}_1 + \check{w}_2 \check{w}_3 \mathfrak{G}_2 - (\check{w}_1^2 + \check{w}_2^2) \mathfrak{G}_3] \right\} ds + \\ & + \left\{ \frac{\partial^2 \Phi_A^{(2)}}{\partial \varepsilon^2} + \left[m_d \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial \varepsilon} + \Omega \frac{\partial^2 \mathfrak{R}}{\partial \varepsilon^2} \right]_1 - \right. \\ & \left. - \int_{(l)} \left\{ [m_d' + (\mathfrak{w} \times m_d) + e_2 (\Omega \mathfrak{G}_1) - e_1 (\Omega \mathfrak{G}_2)] \frac{\partial \mathfrak{w}}{\partial \varepsilon} + \right. \right. \\ & \left. \left. + [\Omega' + (\mathfrak{W}^0 \times \Omega)] \frac{\partial^2 \mathfrak{R}}{\partial \varepsilon^2} \right\} ds. \right\} \end{aligned}$$

Dabei umfaßt der eingeklammerte Ausdruck alle jene Glieder, die zweite Differentialquotienten nach ε enthalten; die zweite Variation der potentiellen Energie der äußeren Kräfte ist dementsprechend in zwei Terme aufgespalten zu denken. Die so zusammengefaßten Glieder entsprechen denen der ersten Variation [vgl. (11)] und verschwinden somit für eine Gleichgewichtslage ($\varepsilon = 0$). Nach Einführung der Abkürzungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} &= \mathfrak{U}, & \mathfrak{U} &= (U, V, W), \\ \frac{\partial \Omega}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} &= \mathfrak{N}, & \mathfrak{N} &= (N_1, N_2, N_3) \end{aligned}$$

⁵ A. E. H. Love: L. c., S. 459 oder Kirchhoffs Vorlesungen über Mechanik.

⁶ J. Larmor: Lond. Math. Soc. Proc. 15 (1884). — S. auch A. E. H. Love: L. c., S. 460.

⁷ S. Eiger: Z. angew. Math. Mech. 9, 341 (1929).

schreibt sich die zweite Variation der Gesamtenergie

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon^2} \Big|_{\varepsilon=0} &= \frac{\partial^2 \Phi_A(1)}{\partial \varepsilon^2} + \int \left\{ \sum_{(i) \ 1, 2, 3} A_1 \left(\frac{\partial \check{w}_1}{\partial s} + \left| \frac{w_2 w_3}{\check{w}_2 \check{w}_3} \right| \right)^2 + \right. \\ &\quad + \left[m_a, \frac{\partial \check{w}}{\partial s}, \check{w} \right] + (\check{w} \times w) (m_a \times \check{w}) + \\ &\quad + \Re [U' + (\mathfrak{B}^0 \times U) - \check{w}_2 \mathfrak{E}_1 + \check{w}_1 \mathfrak{E}_2] - \\ &\quad \left. - \Im [\check{w}_1 \check{w}_3 \mathfrak{E}_1 + \check{w}_2 \check{w}_3 \mathfrak{E}_2 - (\check{w}_1^2 + \check{w}_2^2) \mathfrak{E}_3] \right\} ds. \end{aligned} \quad (15)$$

Die als Nebenbedingung aufzufassende Gleichung

$$U' + (\mathfrak{B}^0 \times U) - \check{w}_2 \mathfrak{E}_1 + \check{w}_1 \mathfrak{E}_2 = 0 \quad (16)$$

lautet in Komponentenzerlegung

$$\begin{aligned} U' + \mathfrak{w}_2^0 W - \mathfrak{w}_3^0 V - \alpha_1 \check{w}_2 + \alpha_2 \check{w}_1 &= 0, \\ V' + \mathfrak{w}_3^0 U - \mathfrak{w}_1^0 W - \beta_1 \check{w}_2 + \beta_2 \check{w}_1 &= 0, \\ W' + \mathfrak{w}_1^0 V - \mathfrak{w}_2^0 U - \gamma_1 \check{w}_2 + \gamma_2 \check{w}_1 &= 0. \end{aligned}$$

Die Undehnbarkeit der Bogenelemente käme durch

$$W' + \mathfrak{w}_1^0 V - \mathfrak{w}_2^0 U = 0$$

zum Ausdruck.

Die Beurteilung der Stabilität der Gleichgewichtslage ist damit auf ein rein mathematisches Problem zurückgeführt: Wir haben die Bedingungen aufzusuchen, unter denen der Ausdruck (15) positiv definiten Charakter behält.

Verschiedenste Stabilitätsprobleme bei dünnen Stäben sind durch (15) auf einen gemeinsamen Ansatz zurückgeführt. Die praktische Durchführung des Lösungsganges wird im folgenden an einem einfachen Beispiel gezeigt.

Anwendungsbeispiel: Achterbildung beim geschlossenen Kreisring.

Die ungespannte Zentrallinie sei ein Kreis vom Radius a . Für die gezeichnete Lage der Systeme (P, XYZ) gilt demnach

$$\mathfrak{B}^0 = \left(0, \frac{1}{a}, 0 \right).$$

Der Ring werde durch radial wirkende Kräfte vom Betrage q pro Längeneinheit beansprucht. Es ist anzugeben, bei welchem kritischen Wert der Belastung der Kreisring aus seiner Ebene herauskippt.

Erste Variation. Durch den Ansatz

$$\Phi_A = -q \int_{(i)} X ds \quad (I)$$

für die potentielle Energie der Belastung kommt zum Ausdruck, daß die Kräfte auch beim Auskippen parallel zur Ebene der unverzerrten Zentrallinie (XZ -Ebene) bleiben sollen. Glieder zweiter Ordnung in X und Z können hier vernachlässigt werden,

da sie nur für den Einbruch in der Ringebene maßgebend sind. Um die Differentialgleichungen aufstellen zu können, haben wir in (11) die Variation von (I)

$$\frac{\partial \Phi_A}{\partial \varepsilon} = -q \int_{(i)} \frac{\partial X}{\partial \varepsilon} ds \quad (I')$$

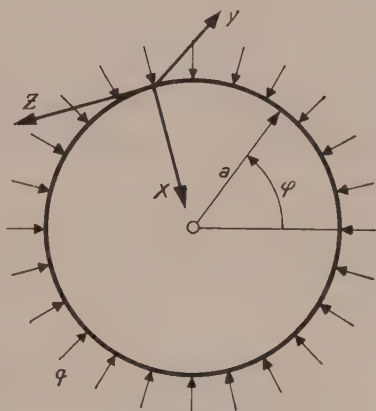


Abb. 3.

einzuführen und die Koeffizienten der als willkürlich anzusehenden Größen \check{w} und $\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial \varepsilon}$ Null zu setzen. Da der Ausdruck (I') \check{w} nicht enthält, bleiben die Gleichgewichtsbedingungen in der Form (12) unverändert, (13) ist durch

$$A_1' + \frac{1}{a} A_3 + q = 0,$$

$$A_2' = 0,$$

$$A_3' - \frac{1}{a} A_1 = 0$$

zu ersetzen. Die Lösungen der Differentialgleichungen

$$\mathfrak{L} = (0, 0, -a q) \quad (\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \mathfrak{E}_3) = \mathfrak{E}, \quad (\text{II})$$

$$w = \left(0, \frac{1}{a}, 0\right), \text{ daher } m_d = 0$$

zeigen, daß das Biegemoment in jedem Querschnitt den Wert Null hat, der Ring behält seine Kreisgestalt bei.

Zweite Variation. Da die zweite Variation der potentiellen Energie der äußeren Kräfte nur aus dem Glied $-q \int \frac{\partial^2 X}{\partial \varepsilon^2} ds$ besteht, verschwindet der für die

Stabilität maßgebende Term [s. Bemerkung im Anschluß an (14)].

Zunächst denken wir uns die Gleichgewichtslage (II) in (15) eingeführt. Da \check{w}_2 nach (II) und (16) nur die Größen U und W enthält (Verschiebungen in der Ringebene), haben wir für die Stabilität gegenüber Kippung anzugeben, unter welchen Umständen der Ausdruck

$$\left. \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial \varepsilon^2} \right|_{\varepsilon=0} = \int_{(l)} \left\{ A_1 \left(\check{w}_1' + \frac{\check{w}_3}{a} \right)^2 + A_3 \left(\check{w}_3' - \frac{\check{w}_1}{a} \right)^2 - a q \check{w}_1^2 + N_2 (V' + \check{w}_1) \right\} ds$$

positiv definiten Charakter besitzt. Indem wir für \check{w}_1

$$w_1 = -V'$$

einführen, erreichen wir nicht nur die Beseitigung der Nebenbedingung, sondern auch den Übergang zu einer anschaulicheren Koordinatengröße. \check{w}_3 kann dabei durch

$$\check{w}_3 \Big|_{\varepsilon=0} = \mathfrak{E}_2 \frac{\partial \mathfrak{E}_1}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = \frac{\partial \beta_1}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = \beta$$

ersetzt werden. Obiger Ausdruck lautet jetzt

$$\left. \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial \varepsilon^2} \right|_{\varepsilon=0} = \int_{(l)} \left\{ A_1 \left(\frac{\beta}{a} - V'' \right)^2 + A_3 \left(\beta' + \frac{V'}{a} \right)^2 - a q V'^2 \right\} ds. \quad (\text{III})$$

Nach Einführung der Abkürzungen

$$\nu = \frac{a^3 q}{A_1}, \quad \lambda = \frac{A_1}{A_3}$$

und des Winkels $\varphi = \frac{s}{a}$ als unabhängig Veränderliche folgt aus (III) das System der Jacobischen Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{d^4 V}{d\varphi^4} + \left(\nu - \frac{1}{\lambda} \right) \frac{d^3 V}{d\varphi^3} - \left(1 + \frac{1}{\lambda} \right) a \frac{d^2 \beta}{d\varphi^2} &= 0, \\ (1 + \lambda) \frac{d^3 V}{d\varphi^3} + a \frac{d^2 \beta}{d\varphi^2} - a \lambda \beta &= 0. \end{aligned}$$

Als erzwungene Randbedingung ist die wegen des Zusammenhaltes des Ringes notwendige Forderung zu betrachten, daß alle Verschiebungsgrößen periodische Funktionen

von φ mit der Periode 2π sind. Aus diesem Grunde können keine freien Randbedingungen auftreten. Daraus bestimmen sich (nach Elimination von β) die Eigenwerte

$$\nu = \frac{(n^2 - 1)^2}{n^2 + \lambda}. \quad (\text{IV})$$

Ihre Diskussion wird im Anschluß an (V) durchgeführt.

Verallgemeinerung. Wir haben angenommen, daß die Kräfte während des Kippvorganges immer parallel zur Ebene der unverzerrten Zentrallinie bleiben. Wir wollen nunmehr diese Annahme durch die allgemeinere ersetzen, daß der Ausbiegung (in Richtung Y) eine ihr proportionale Kraft entgegenwirkt.

$$|d\mathfrak{R}_Y| = -\kappa Y ds.$$

Dem Potential (I) der äußeren Kräfte ist dann der Ausdruck

$$\frac{\kappa}{2} \int_{(I)} Y^2 ds$$

hinzuzufügen. Die die Gleichgewichtslage bestimmenden Größen bleiben somit in der Form (II) erhalten. Hingegen lauten die beiden Terme von $\frac{\partial^2 \Phi_A}{\partial \varepsilon^2}$ jetzt

$$\frac{\partial^2 \Phi_A^{(2)}}{\partial \varepsilon^2} = \int_{(I)} \left(\kappa Y \frac{\partial^2 Y}{\partial \varepsilon^2} - q \frac{\partial^2 X}{\partial \varepsilon^2} \right) ds, \quad \frac{\partial^2 \Phi_A^{(1)}}{\partial \varepsilon^2} = \kappa \int_{(I)} \left(\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} \right)^2 ds,$$

das heißt es tritt in (III) das Zusatzglied $\kappa \int_{(I)} V^2 ds$ auf.

Die Jacobischen Gleichungen dieses Problems

$$\begin{aligned} \frac{d^4 V}{dq^4} + \left(\nu - \frac{1}{\lambda} \right) \frac{d^2 V}{dq^2} - \left(1 + \frac{1}{\lambda} \right) a \frac{d^2 \beta}{dq^2} + \omega V &= 0, & \omega &= \frac{a^4 \kappa}{A_1}, \\ (1 + \lambda) \frac{d^2 V}{dq^2} + a \frac{d^2 \beta}{dq^2} - a \lambda \beta &= 0 \end{aligned}$$

führen nach Elimination von β auf die Eigenwerte

$$\nu = \frac{(n^2 - 1)^2}{n^2 + \lambda} + \frac{\omega}{n^2}. \quad (\text{V})$$

Für $\kappa = \omega = 0$ gehen obige Gleichungen in den zuerst behandelten Fall über. Ein weiterer Spezialfall ist durch $\kappa = \frac{q}{a}$, ($\omega = \nu$) gegeben: Die Kräfte bleiben während des Kippvorganges nach dem Ringmittelpunkt hin gerichtet. Für $\omega = \nu$ folgt aus (V)

$$\nu = \frac{n^2(n^2 - 1)}{n^2 + \lambda}.$$

Der Vergleich mit (IV) zeigt, daß die Stabilität im zuletzt betrachteten Fall etwas größer ist als bei parallel bleibenden Kräften⁸.

Für $n = 1$ wird

$$\nu = q = 0.$$

Es entspricht dies der Freiheit des Ringes, eine Drehung um einen seiner Durchmesser auszuführen. Den kleinsten Wert des Druckes, bei dem Kippung auftreten kann, erhalten wir somit für $n = 2$ (zwei Wellen, daher Achterbildung).

Bei großen κ -Werten hingegen wird nach (V) im allgemeinen der kleinsten Knicklast eine Ausbiegungsform mit mehr als zwei Wellen entsprechen. Zu einem analogen

⁸ Vgl. S. Timoschenko: Z. angew. Math. Mech. **3**, 358 (1923). Die Ergebnisse stimmen überein. — S. auch K. Federhofer: Österr. Ingenieur-Arch. **4**, 27 (1950).

Ergebnis gelangte R. Grammel für den geraden, elastisch gebetteten Stab⁹. Der Auffassung von κ als Bettungsziffer kommt jedoch hier keine praktische Bedeutung zu.

Da obige Ergebnisse eine Näherung für Speichenräder geben, kann durch Einführung des κ -Wertes der Einfluß der Biegesteifigkeit der Speichen auf die Stabilität des Ringes abgeschätzt werden.

(Eingegangen am 15. Januar 1952.)

Die Fernpolstellung der ebenen Bewegung.

Von R. Bereis, Wien.

Mit 5 Textabbildungen.

Zusammenfassung. Im Anschluß an eine frühere Arbeit¹ wird der Bewegungszustand einer starren, komplanar bewegten, ebenen Scheibe für jenen Augenblick untersucht, in dem der Momentanpol ein Fernpunkt ist. Die dabei auftretenden Ausartungen und Vereinfachungen werden vor allem an dem Beispiel des zentrischen Schubkurbelgetriebes illustriert.

Summary. With reference to an earlier paper¹ the state of motion is discussed for a rigid disc moving in its own plane, the discussion being carried out for that instant at which the instantaneous center is a far point. The resulting degenerations and simplifications are discussed by taking the concentric slider crank mechanism as an example.

Résumé. Continuant un travail précédent¹, l'auteur étudie l'état de mouvement d'un disque rigide, mobile dans son plan, à l'instant où le centre instantané est à l'infini. Les dégénéralisations et simplifications qui en résultent sont illustrées notamment par l'exemple du mouvement à bielle et manivelle.

1. Einleitung.

Rückt bei einer ebenen zwangsläufigen Bewegung der Momentanpol für einen Augenblick ins Unendliche, so treten in einer solchen Fernpolstellung in den kinematischen Verhältnissen Ausartungen oder wesentliche Vereinfachungen ein. So wird beispielsweise aus der sonst kubischen Scheitelkurve eine Hyperbel, ebenso aus der P -Kurve, die sonst eine bizirkuläre Quartik ist; die S -Kurve, sonst eine bizirkuläre Quintik, reduziert sich auf eine zirkuläre Quartik usw.

Die bisherigen Untersuchungen der Fernpolstellung (R. Mehmke, M. Krause, G. Lochs usw.) bezogen sich auf die Bahntangenten, die Bahnkrümmung und die Bahnaffinnormale. Die vorliegende Arbeit betrachtet darüber hinaus die Bahnschmiegeparabeln, die Bahnschmiegekegelschnitte sowie sextaktische Bahnpunkte. Verwendet wird wieder die komplexe Darstellung der Bewegung in ähnlicher Art, wie sie der Verfasser in einer vorangegangenen Arbeit bereits für den allgemeinen Fall eingesetzt hat¹.

Zur Illustration wurde vor allem die zentrische Schubkurbel herangezogen, da diesem Mechanismus ausgedehnte technische Bedeutung zukommt und da außerdem bei ihm bemerkenswert einfache Ergebnisse für die Fernpolstellung zu Tage treten.

2. Grundlagen.

Eine starre ebene Scheibe Σ bewege sich in ihrer Ebene Σ_0 . Zur mathematischen Beschreibung des Bewegungsvorganges diene, wie üblich, in Σ_0 ein Normalkoordinatensystem x, y mit dem Ursprung O , analog in der bewegten Scheibe das System ξ, η mit dem Ursprung A (Abb. 1). Jeder Punkt (x, y) von Σ_0 werde durch die komplexe Zahl $z = x + iy$, jeder Punkt (ξ, η) von Σ durch die komplexe Zahl $\zeta = \xi + i\eta$

⁹ C. B. Biezeno und R. Grammel: Technische Dynamik, S. 521.

¹ R. Bereis: Aufbau einer Theorie der ebenen Bewegung mit Verwendung komplexer Zahlen. Österr. Ingenieur-Arch. 5, 246—266 (1951); im folgenden zitiert mit „I“.

gekennzeichnet; insbesondere sei a die komplexe Koordinate von A . Legt man der Darstellung einer zwangsläufigen Bewegung den Drehwinkelparameter $\varphi = \angle x \xi$ zugrunde, so wird sie durch die komplexe Gleichung

$$z = a(\varphi) + \zeta e^{i\varphi} \quad (1)$$

beschrieben, und die notwendigen Rechnungen gestalten sich besonders einfach. Heftet man an jeden Systempunkt den um 2π Rechte geschwenkten n -ten Ableitungsvektor $z^{(n)}$ an, so fällt dessen Ende stets mit einem bestimmten, von ζ unabhängigen Punkt P_n , dem „ n -ten Pol“, zusammen. Die so entstehende Polkette P_1, P_2, \dots hat sich als ein sehr brauchbares Hilfsmittel zur Untersuchung und Beschreibung ebener Bewegungszustände erwiesen².

Rückt der erste Pol P_1 , das Momentanzentrum, ins Unendliche, so versagt die eben dargelegte Untersuchungsmethode. Für diese „Fernpolstellung“ von Σ muß auf die Vorteile des Drehwinkelparameters φ verzichtet werden, doch zeigt sich, daß hier ein beliebiger reeller Parameter τ — ohne spezielle Voraussetzungen — verwendet werden kann. Die Funktion

$$\varphi = \varphi(\tau)$$

sei als stetig und hinreichend oft differenzierbar vorausgesetzt. Eine Fernpolstellung ist dann durch

$$\varphi' = \frac{d\varphi}{d\tau} = 0 \quad (2)$$

gekennzeichnet.

3. Bahntangenten.

Durch Differentiation der Bewegungsgleichung (1) nach τ erhält man den 1. Ableitungsvektor

$$z' = a' + \zeta i e^{i\varphi} \cdot \varphi' = a' + (z - a) \varphi' i, \quad (3)$$

der die Bahntangente anzeigt. In der Fernpolstellung $\varphi' = 0$ ist

$$z' = a', \quad (4)$$

also haben alle Punkte von Σ gleich große und gleich gerichtete Geschwindigkeiten und es gilt

Satz 1: Bei Fernpolstellung der bewegten Ebene führt diese eine Momentan-Parallelverschiebung aus; alle Bahntangenten sind untereinander parallel.

4. Bahnkrümmung.

Der 2. Ableitungsvektor

$$z'' = a'' + (\varphi'' i - \varphi'^2) \zeta e^{i\varphi} \quad (5)$$

geht bei Fernpolstellung zufolge (2) über in

² Die höheren Pole wurden von R. Müller als höhere Krümmungsmitten von Hüllbahnen von Geraden eingeführt. Analytisch, wenn auch noch nicht mit komplexen Zahlen, behandelten die Polkette M. Krause und sein Schüler A. Carl. Der Versuch des Aufbaues einer Theorie der ebenen Bewegung unter Benützung der Polkette wurde auch schon von A. Winkler gemacht (diese Arbeit war dem Verfasser zur Zeit der Fertigstellung von „I“ nicht bekannt). — R. Müller: Beiträge zur Theorie des ebenen Gelenkvierecks. Z. Mathem. Physik **42**, 250 (1897). — M. Krause: Analysis der ebenen Bewegung. Berlin u. Leipzig. 1920. — A. Carl: Über höhere Rückkehr- und Wendepole. Diss. Jena 1911. — A. Winkler: Beiträge zur Theorie der ebenen Bewegung starrer ebener Systeme unter Benützung der höheren Rückkehr- und Wendepole. Diss. Techn. Hochschule Dresden 1919. — R. Bereis: „I“.

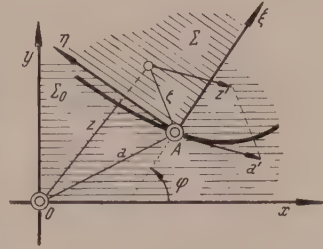


Abb. 1.

und wegen

$$z + \frac{z''' i}{\varphi'''} = q_3 \quad (13)$$

gilt

Satz 4: Bei Fernpolstellung fallen die Endpunkte aller mit $1/\varphi'''$ multiplizierten, um einen rechten Winkel geschwenkten und in den Systempunkten angehefteten dritten Ableitungsvektoren im 3. Quasipol Q_3 zusammen.

Nach I, S. 249, kennzeichnet die komplexe Zahl

$$n_a = z'' - \frac{1}{3} \frac{(z', z''')}{(z', z'')} z' \quad (14)$$

einen Vektor der Affinnormalen der Bahn von z^4 . Der Punkt N_a^* mit den Koordinaten

$$n_a^* = z + \frac{n_a}{\varphi''} i = q_2 - \frac{(z', z''')}{3 \varphi'' (z', z'')} z' i \quad (15)$$

wird somit durch das in z auf die Bahn-Affinnormale von z errichtete Lot aus der Wendegeraden w ausgeschnitten.

Wir führen nun ein neues Koordinatensystem $\mathfrak{z} = \mathfrak{x} + i \mathfrak{y}$ mit dem Ursprung Q_2 ein; α' zeige die Richtung der reellen Achse an. Die Transformationsgleichungen lauten mithin

$$z = q_2 + \frac{\alpha'}{|\alpha'|} \mathfrak{z}, \quad \mathfrak{z} = \frac{|\alpha'|}{\alpha'} (z - q_2). \quad (16)$$

Für die neue Koordinate n_a^* von N_a^* findet man dann, wenn überdies die Ableitungen z', z'', z''' in (15) vermöge (4), (8) und (13) auf z zurückgeführt werden, schließlich

$$n_a^* = \frac{(r_3 - \mathfrak{x}) \varphi'' |\alpha'| i}{3 \varphi''^2 \mathfrak{x}}, \quad (17)$$

wobei für

$$r_3 = \Re \{q_3\}$$

zu setzen ist.

Da sich n_a^* von \mathfrak{y} als unabhängig erweist, bleibt N_a^* für alle Punkte eines Polstrahls ($\mathfrak{x} = \text{konst.}$) invariant. Dies gibt

Satz 5: In der Fernpolstellung umhüllen die Bahn-Affinnormalen aller Punkte eines Polstrahls eine Parabel, deren Brennpunkt N_a^* auf der Wendegeraden w liegt⁵.

6. Scheitelkurve.

Fällt in einem Kurvenpunkt die Affinnormale mit der gewöhnlichen Normalen zusammen, so liegt ein Kurvenpunkt mit stationärem Krümmungskreis, also ein Scheitel vor. Um jene Systempunkte zu finden, die im Augenblick der Fernpolstellung einen Scheitel ihrer Bahn durchlaufen, hat man die Bedingung für parallele Lage des Normalenvektors $z' i$ und des Affinnormalenvektors n_a (14), also $(z' i, n_a) = 0$ anzuschreiben. Man erhält

$$3 (z', z'') (z' i, z'') - (z', z''') (z' i, z') = 0, \quad (18)$$

wobei alle Ableitungsvektoren vermöge (4), (8) und (13) wieder durch z auszudrücken wären. Über die Art der so gewonnenen „Scheitelkurve“ f erhält man Aufschluß,

⁴ Das Klammersymbol $(a, b) = \frac{i}{2} (a \bar{b} - \bar{a} b) = - (b, a)$ bedeutet geometrisch die Fläche des von den Vektoren a und b aufgespannten Parallelogramms. Es gehorcht naturgemäß dem distributiven Gesetz.

⁵ G. Lochs: Die Affinnormalen der Bahn- und Hüllkurven usw. Mh. Math. Physik **38**, 50 (1931).

Der 2. Quasipol ergänzt das Dreieck OAB zu einem Rechteck. Die Wendegerade w läuft parallel zur Kurbel durch B . Q_3 rückt in den Fernpol. Da z' und z''' reell, mithin

$$(z', z''') = (-r, r) = 0$$

ist, gibt z'' die Richtung der Bahnaufformalen an (14). Die Bahnaufformalen einer Geraden g umhüllen daher eine Parabel mit dem Brennpunkt Q_2 und der Scheitelgeraden g . Zuzufolge $(z', z''') = 0$ zerfällt die Scheitelkurve (18) in die Wendegerade w und eine Gerade normal w durch A . Alle Punkte von w durchlaufen in dem betrachteten Augenblick Flachpunkte ihrer Bahn. Die Figur zeigt für einen allgemeinen Punkt Z , einen Scheitel S und einen Flachpunkt die Bahn, den augenblicklichen Krümmungskreis, Bahnaufformalen und Sehnenmittenkurve.

7. Stationäre Bahnschmiegeparabeln.

Viermaliges Differenzieren der Bewegungsgleichung (1) nach τ liefert der 4. Ableitungsvektor

$$z^{IV} = a^{IV} + \zeta e^{i\varphi} (\varphi^{IV} i - 3 \varphi''^2 - 6 \varphi'' \varphi'^2 i + \varphi'^4). \quad (20)$$

Dieser geht bei Fernpolstellung zufolge (2) über in

$$z^{IV} = a^{IV} + \zeta e^{i\varphi} (\varphi^{IV} i - 3 \varphi''^2) = a^{IV} + (z - a) (\varphi^{IV} i - 3 \varphi''^2). \quad (21)$$

Die komplexe Koordinate des durch $z^{IV} = 0$ gekennzeichneten 4. Quasipols Q_4 ergibt sich mit

$$q_4 = a + a^{IV} / (3 \varphi''^2 - \varphi^{IV} i) \quad (22)$$

und wegen

$$z + z^{IV} / (3 \varphi''^2 - \varphi^{IV} i) = q_4 \quad (23)$$

gilt

Satz 7: Bei Fernpolstellung fallen die Endpunkte der der Drehstreckung 1: $(3 \varphi''^2 - \varphi^{IV} i)$ unterworfenen und in den Systempunkten angehefteten 4. Ableitungsvektoren im 4. Quasipol Q_4 zusammen.

Wird für einen Kurvenpunkt der Mittelpunkt des Schmiegkegelschnittes ein Fernpunkt, so liegt ein Kurvenpunkt mit stationärer Schmiegparabel vor. Um jene Systempunkte zu finden, die in einem bestimmten Zeitpunkt Bahnstellen mit stationärer Bahnschmiegeparabel durchlaufen, hat man die Bedingung $(n_a, n_a') = 0$ auszuwerten. Man erhält nach I, S. 258

$$3(z', z'') [(z', z^{IV}) + 4(z'', z''')] - 5(z', z''')^2 = 0, \quad (24)$$

wobei alle Ableitungsvektoren wieder durch z auszudrücken sind. Der Ort dieser Punkte, die sogenannte P -Kurve, ist im allgemeinen eine bizirkuläre Quartik. Bei Fernpolstellung hingegen stellen die Terme der Gl. (24), einzeln Null gesetzt, der Reihe nach die Wendegerade w , eine Gerade g_4 durch Q_4 , die Gerade $g_{23} = Q_2 Q_3$ und eine Gerade g_3 parallel w durch Q_3 dar. Die Kurve läßt demnach die symbolische Schreibweise

$$3w(g_4 + 4g_{23}) - 5g_3^2 = 0 \quad (25)$$

zu und ist demnach eine Hyperbel mit der Asymptote w . Somit gilt

Satz 8: Bei Fernpolstellung ist die P -Kurve, das ist der Ort aller Punkte, die in dem betrachteten Moment Stellen mit stationärer Bahnschmiegeparabel durchlaufen, eine Hyperbel, für die die Wendegerade eine Asymptote ist.

Beispiel. Zentrische Schubkurbel. Über die bereits angeführten Ergebnisse (S. 251, Beispiel 2) hinaus findet man

$$\varphi^{\text{IV}} = \frac{r}{t} + \frac{3r^3}{t^3};$$

$$z^{\text{IV}} = z \left[\left(\frac{r}{t} + \frac{3r^3}{t^3} \right) i - \frac{3r^2}{t^2} \right] + r \left(\frac{r}{t} + \frac{3r^3}{t^3} \right);$$

$$q_4 = r i [1 - 1/(\varphi^{\text{IV}} i - 3\varphi'^2)].$$

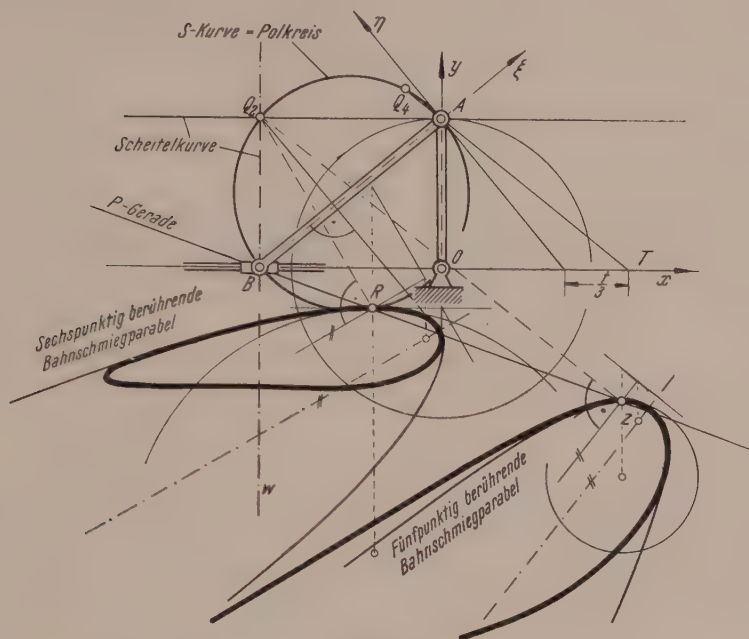


Abb. 5.

Da $(z', z''') = 0$, spaltet sich in (24) die Wendegerade w , für die als Ort der Flachpunkte keine Bahnschmiegekegelschnitte existieren, ab, so daß die P -Kurve in diesem speziellen Fall eine Gerade durch den Schieber B ist. Ihre Gleichung lautet

$$(z', z^{\text{IV}}) + 4(z'', z''') = 0$$

oder

$$x \left(1 - \frac{r^2}{t^2} \right) + \frac{r}{t} y + t \left(1 - \frac{r^2}{t^2} \right) = 0.$$

Der Anstieg der P -Geraden beträgt demnach

$$\text{tg } \varepsilon = \frac{r}{t} - \frac{t}{r} = \text{tg } \varphi - \text{ctg } \varphi.$$

Ein aus Q_2 auf die Pleuelstange AB gefälltes Lot schneidet demnach die y -Achse in einem Punkt der P -Geraden. Abb. 5 zeigt einen Punkt z mit stationärer Bahnschmiegeparabel.

Durch $(z'', z^{\text{IV}}) = 0$ ist ein Kreis durch Q_2, Q_4 dargestellt; derselbe enthält auch die Punkte A ($z^{(2m)}$ stets rein imaginär) und B ($z^{(n)}$ stets reell), mithin auch O . Führt man die analogen Überlegungen für den Kreis $(z'', z^{(2m)}) = 0$ aus, der Q_2, Q_{2m}, A, B und O enthält, so erkennt man, daß auf dem Umkreis des Dreiecks ABO überhaupt alle Quasipole gerader Ordnung liegen, weshalb er kurz „Polkreis“ genannt sei.

Man erhält insbesondere den 4. Quasipol Q_4 , indem man auf der x -Achse von ihrem Schnittpunkt mit der η -Achse aus in positiver Richtung $t/3$ aufträgt und den so erhaltenen Punkt T mit A verbindet. (TA) schneidet den Polkreis, wie eine einfache Rechnung zeigt, in Q_4 (Abb. 5).

Die Bedingungsgleichung $k \sin \varphi = r \sin \tau$ definiert φ als eine gerade Funktion von $t = \frac{\pi}{2} - \tau$. Daher zeigt die Taylor-Entwicklung

$$\varphi = \varphi(0) + \dot{\varphi}(0)t + \ddot{\varphi}(0)\frac{t^2}{2} + \ddot{\ddot{\varphi}}(0)\frac{t^3}{3!} + \dots,$$

daß sämtliche Ableitungen ungerader Ordnung von φ nach τ an der Stelle $\tau = \frac{\pi}{2}$ verschwinden. Da ferner auch $\cos \varphi$ und $\sin \varphi$ gerade Funktionen von t sind, also an der Stelle $t = 0$ (das heißt $\tau = \frac{\pi}{2}$) verschwindende Ableitungen ungerader Ordnung besitzen, müssen alle Ableitungsvektoren von z von ungerader Ordnung reell sein ($z^{(2n-1)} = (-1)^n \cdot r$).

8. Burmester-Punkte.

In jedem Augenblick einer Bewegung gibt es vier Punkte B_i , deren Bahnkurven einen fünfpunktig berührenden Krümmungskreis besitzen. Diese Burmester-Punkte gehören der Scheitelkurve f und jener zirkularen Kubik f' an, die man durch Differenziation nach dem Parameter gewinnt (I, S. 259).

Beispiel. Zentrische Schubkurbel. Gl. (18) nach τ differenziert, liefert unter Berücksichtigung der speziellen Verhältnisse eines zentrischen Schubkurbelgetriebes

$$3(z', z'')(z''i, z'') + r^2[4(z', z'') + (z', z^{IV})] = 0.$$

Da diese Gleichung für die Punkte A und B erfüllt ist, und $(z''i, z'') = 0$ das Minimalgeradenpaar durch den 2. Quasipol Q_2 bedeutet, stellt f' in diesem besonderen Fall eine zirkuläre Kubik durch A und B mit der Asymptote w dar. Von den vier Burmester-Punkten liegen daher je einer in trivialer Weise in A und B , während die restlichen zwei Punkte durch die komplexen Zahlen

$$\frac{1}{2}(-3t \pm \sqrt{t^2 - 4r^2}) + ri \dots t = \overline{OB}$$

gekennzeichnet werden (reell nur für $t \geq 2r$). Abb. 4 zeigt die Bahn eines solchen Burmester-Punktes $B_{3,4}$.

Läßt man A auf der y -Achse variieren, so erhält man ∞^1 zentrische Schubkurbelgetriebe in Fernpolstellung, deren nicht triviale Burmester-Punkte die Hyperbel

$$\left(x + \frac{3t}{2}\right)^2 - 4y^2 = t^2$$

erfüllen.

9. Stationäre Bahnschmiegekegelschnitte.

Fünfmaliges Differenzieren der Bewegungsgleichung (1) nach τ liefert den 5. Ableitungsvektor

$$\begin{aligned} z^V = a^V + \zeta e^{i\varphi} (\varphi^V i - 10 \varphi''' \varphi'' - 5 \varphi^{IV} \varphi' - 10 \varphi''' \varphi'^2 i - \\ - 15 \varphi''^2 \varphi' i + 10 \varphi'' \varphi'^3 + \varphi'^5 i). \end{aligned} \quad (26)$$

Dieser geht bei Fernpolstellung zufolge (2) über in

$$z^V = a^V + \zeta e^{i\varphi} (\varphi^V i - 10 \varphi''' \varphi'') = a^V + (z - a) (\varphi^V i - 10 \varphi''' \varphi'). \quad (27)$$

Die komplexe Koordinate des durch $z^V = 0$ gekennzeichneten 5. Quasipols Q_5 ergibt sich mit

$$q_5 = a + a^V / (10 \varphi''' \varphi'' - \varphi^V i) \quad (28)$$

und wegen

$$z + z^V / (10 \varphi''' \varphi'' - \varphi^V i) = q_5 \quad (29)$$

gilt

Satz 9: *Bei Fernpolstellung fallen die Endpunkte der der Drehstreckung 1: $(10 \varphi''' \varphi'' - \varphi^V i)$ unterworfenen und in den Systempunkten angehefteten 5. Ableitungsvektoren im 5. Quasipol Q_5 zusammen.*

Ist für einen Systempunkt der Mittelpunkt seines Bahnschmiegekegelschnittes stationär, so berührt der Schmiegekegelschnitt sechspunktig. Die Bedingungsgleichung für einen solchen sextaktischen Punkt lautet nach I, S. 260

$$(z', z'')^2 [(z', z^V) + 5 (z'', z^{IV})] - 5 (z', z'') (z', z''') [(z', z^{IV}) + 2 (z'', z''')] + \frac{40}{9} (z', z''')^3 = 0, \quad (30)$$

wobei alle Ableitungsvektoren wieder durch z auszudrücken sind. Der Ort dieser Punkte, die sogenannte S -Kurve, ist im allgemeinen eine bizirkulare Quintik. Bei Fernpolstellung hingegen stellen die Terme der Gl. (30), einzeln Null gesetzt, der Reihe nach die Wendegerade w , eine Gerade g_5 durch Q_5 , einen Kreis k_{24} durch Q_2 und Q_4 , abermals die Wendegerade, die Gerade g_3 parallel w durch Q_3 , die Gerade g_4 durch Q_4 , die Gerade $g_{23} = (Q_2 Q_3)$ und wieder g_3 dar. Die Kurve läßt demnach die symbolische Schreibweise

$$w^2 (g_5 + 5 k_{23}) - 5 w g_3 (g_4 + 2 g_{23}) + \frac{40}{9} g_3 = 0 \quad (31)$$

zu und ist demnach eine zirkulare Quartik mit der Doppelasymptote w . Im Fernpol liegt ein Berührknoten. Somit gilt

Satz 10: *Bei Fernpolstellung ist die S -Kurve, das ist der Ort aller Punkte, die in dem betrachteten Moment Stellen mit stationärem Bahnschmiegekegelschnitt durchlaufen, eine zirkulare Quartik mit der Doppelasymptote w . Im Fernpol tritt ein Berührknoten auf.*

Beispiel. Zentrische Schubkurbel. Beim zentrischen Schubkurbelgetriebe ist, wie oben gezeigt, $\varphi^V = 0$ und $z^V = -r$. Somit verschwinden (z', z''') und (z', z^V) . Dadurch spaltet sich in Gl. (30) die doppelt zu zählende Wendegerade w ab, so daß sich die S -Kurve in diesem speziellen Fall reduziert auf

$$(z'', z^{IV}) = 0,$$

also mit dem Polkreis (= Umkreis des Dreiecks ABO) identisch ist.

Die durch B gehende P -Gerade schneidet den Polkreis in einem weiteren Punkt R , dessen Bahn in dem betrachteten Zeitpunkt naturgemäß eine sechspunktig berührende Schmiegeparabel besitzt (Abb. 5).

Die Untersuchung einer exzentrischen Schubkurbel liefert nur unwesentliche Abweichungen von obigen Ergebnissen. So existiert auch bei der exzentrischen Schubkurbel in Fernpolstellung ein Polkreis, der alle Pole gerader Ordnung enthält (Durchmesser AB) und mit der S -Kurve übereinstimmt usw.

(Eingegangen am 18. Januar 1952.)

Zum Anschluß von Stäben mit Winkelquerschnitt.

Von K. Girkmann und E. Tungl, Wien.

Mit 4 Textabbildungen.

Zusammenfassung: Es wird die Spannungsverteilung in einem Winkelstab untersucht, der eine Zug- oder Druckkraft überträgt und nur mit einem Schenkel angeschlossen ist; hierbei wird festgestellt, wie weit der abstehende Schenkel im Anschluß mitwirkt.

Summary: The stress distribution is discussed for an angle bar which transmits a pull or pressure, and is attached by its one side only. The influence of the other side on the connection is determined.

Résumé: Étude de la distribution des contraintes dans un profilé en cornière transmettant une force de traction ou de compression, et attaché seulement par l'une de ses ailes. On détermine l'influence de l'aile libre au droit de l'attaché.

1. Einleitung.

Die folgende Untersuchung wird unter der Annahme durchgeführt, daß der Anschluß des Winkelstabes an die Knotenbleche mittels Punktschweißungen erfolge, deren Übertragungskräfte als Einzellasten in Rechnung gestellt werden. Es wird die unbeschränkte Gültigkeit des Hookeschen Elastizitätsgesetzes vorausgesetzt. Der Biege- und Torsionswiderstand der Winkelschenkel und der Knotenbleche senkrecht zu ihren Ebenen wird als vernachlässigbar klein betrachtet und von der Berücksichtigung der durch die Blechstärken bedingten Exzentrizität des Kraftangriffes wird abgesehen.

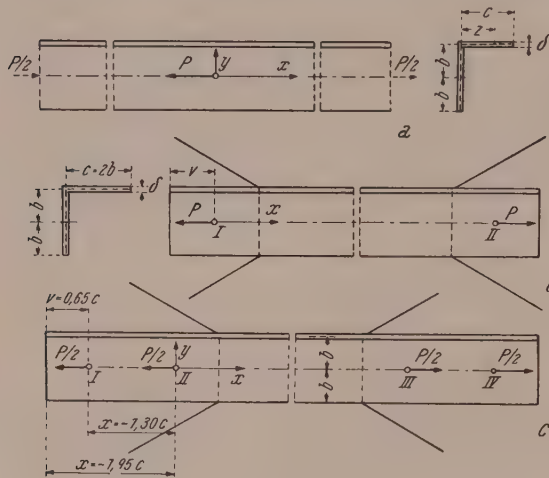


Abb. 1a-b.

Zunächst wird der Angriff einer Einzellast P gemäß Abb. 1a untersucht. Die beiden Winkelschenkel werden hierbei als streifenförmige, miteinander unverschieblich verbundene Scheiben von unbegrenzter Länge aufgefaßt, die beiderseits im Unendlichen gestützt sind. Sodann wird mit Hilfe der erhaltenen Ergebnisse der Spannungszustand eines Winkelstabes berechnet, der gemäß Abb. 1b angeschlossen ist und eine Zug- oder Druckkraft P zu übertragen hat. An den Schmalrändern bleiben allerdings Gleichgewichtssysteme bildende Normal- und Schubspannungen zurück, die aber mit wachsender Vorkopflänge v gemäß dem Prinzip von de Saint Venant rasch

abnehmen. Bei hinreichend großem v werden sie vernachlässigbar klein, womit dann die Randbedingungen auch für die Endquerschnitte des Winkels erfüllt sind.

Durch Zusammenlegen von Teilergebnissen des Einzellastangriffes können sodann die Spannungsverhältnisse für den Fall von zwei oder mehreren hintereinander liegenden Punktschweißungen ermittelt werden. Hierbei ist der Einfluß einer zur Geltung kommenden Stabeinspannung noch zu berücksichtigen.

2. Die Spannungsfunktionen für das Scheibenwerk nach Abbildung 1 a.

a) Die den Spannungszustand im angeschlossenen Winkelschenkel von der Breite $2b$ und der Dicke δ beschreibende Airysche Spannungsfunktion $F_1(x, y)$ wird aus der Lösung F' für den Einzellastangriff in der unendlich ausgedehnten Ebene und aus einer im gesamten Scheibenbereich regulären Zusatzfunktion F'' gebildet. Der singuläre Lösungsanteil wird in der Form eines Fourierschen Integrals¹ angeschrieben:

$$F' = \frac{1+\mu}{4\pi\delta} P \int_0^\infty \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{1-\mu}{1+\mu} - \alpha y \right) e^{-\alpha y} \sin \alpha x d\alpha, \quad y \geq 0, \quad (1)$$

wobei μ die Querdehnungszahl des Werkstoffes bedeutet. Im Hinblick auf die gewählte Darstellung der Funktion F' wird die reguläre Zusatzfunktion aus partikulären Integralen der Scheibengleichung $\Delta F = 0$ wie folgt zusammengesetzt

$$F'' = Q \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha b}}{\alpha^2} (A_1 \cos \alpha y + B_1 \alpha y \sin \alpha y + C_1 \sin \alpha y + D_1 \alpha y \cos \alpha y) \sin \alpha x d\alpha. \quad (2)$$

¹ K. Girkmann: Flächentragwerke, 2. Aufl., S. 108. Wien: Springer-Verlag. 1948.

Die Hilfsgröße

$$Q = \frac{1+\mu}{4\pi\delta} P \quad (3)$$

sowie der Faktor $e^{-\alpha b}$ wurden zwecks Vereinfachung der Rechnung aus den Parameterfunktionen A_1, B_1, C_1, D_1 herausgehoben.

Die Spannungsfunktion

$$F_1(x, y) = F' + F'' \quad (4)$$

für den angeschlossenen Winkelschenkel liefert mit Hilfe von (1) und (2) die Spannungskomponenten

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2} = Q \int_0^\infty \left(\frac{3+\mu}{1+\mu} \mp \alpha y \right) e^{\mp \alpha y} \sin \alpha x d\alpha + Q \int_0^\infty [(A_1 + 2B_1) \mathfrak{Cof} \alpha y + B_1 \alpha y \mathfrak{Sin} \alpha y + (C_1 + 2D_1) \mathfrak{Sin} \alpha y + D_1 \alpha y \mathfrak{Cof} \alpha y] e^{-\alpha b} \sin \alpha x d\alpha, \quad (5/1)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} = -Q \int_0^\infty \left(\frac{1-\mu}{1+\mu} \mp \alpha y \right) e^{\mp \alpha y} \sin \alpha x d\alpha - Q \int_0^\infty (A_1 \mathfrak{Cof} \alpha y + B_1 \alpha y \mathfrak{Sin} \alpha y + C_1 \mathfrak{Sin} \alpha y + D_1 \alpha y \mathfrak{Cof} \alpha y) e^{-\alpha b} \sin \alpha x d\alpha, \quad (5/2)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y} = \pm Q \int_0^\infty \left(\frac{2}{1+\mu} \mp \alpha y \right) e^{\mp \alpha y} \cos \alpha x d\alpha - Q \int_0^\infty [(A_1 + B_1) \mathfrak{Sin} \alpha y + B_1 \alpha y \mathfrak{Cof} \alpha y + (C_1 + D_1) \mathfrak{Cof} \alpha y + D_1 \alpha y \mathfrak{Sin} \alpha y] e^{-\alpha b} \cos \alpha x d\alpha, \quad (5/3)$$

wobei die oberen Vorzeichen für $y \geq 0$ und die unteren für $y \leq 0$ gelten.

b) Für den abstehenden Schenkel mit der Breite c wird analog (2) der aus partikulären Integralen der Scheibengleichung gebildete Ansatz

$$F_2(x, z) = Q \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha b}}{\alpha^2} (A_2 \mathfrak{Cof} \alpha z + B_2 \alpha z \mathfrak{Sin} \alpha z + C_2 \mathfrak{Sin} \alpha z + D_2 \alpha z \mathfrak{Cof} \alpha z) \sin \alpha x d\alpha \quad (6)$$

gewählt. Er ergibt die Spannungskomponenten

$$\sigma_x = Q \int_0^\infty [(A_2 + 2B_2) \mathfrak{Cof} \alpha z + B_2 \alpha z \mathfrak{Sin} \alpha z + (C_2 + 2D_2) \mathfrak{Sin} \alpha z + D_2 \alpha z \mathfrak{Cof} \alpha z] e^{-\alpha b} \sin \alpha x d\alpha, \quad (7/1)$$

$$\sigma_z = -Q \int_0^\infty (A_2 \mathfrak{Cof} \alpha z + B_2 \alpha z \mathfrak{Sin} \alpha z + C_2 \mathfrak{Sin} \alpha z + D_2 \alpha z \mathfrak{Cof} \alpha z) e^{-\alpha b} \sin \alpha x d\alpha, \quad (7/2)$$

$$\tau_{xz} = -Q \int_0^\infty [(A_2 + B_2) \mathfrak{Sin} \alpha z + B_2 \alpha z \mathfrak{Cof} \alpha z + (C_2 + D_2) \mathfrak{Cof} \alpha z + D_2 \alpha z \mathfrak{Sin} \alpha z] e^{-\alpha b} \cos \alpha x d\alpha. \quad (7/3)$$

3. Die Randbedingungen des Scheibenwerkes.

Die Spannungsfunktionen F_1 und F_2 enthalten acht willkürliche Parameterfunktionen $A_1(\alpha), A_2(\alpha) \dots D_2(\alpha)$, die so bestimmt werden können, daß allen Rand- und Übergangsbedingungen an den Längsrändern der Scheibe exakt entsprochen wird. Unter Beachtung der eingangs angeführten Idealisierungen sind folgende Bedingungen zu erfüllen:

I. Längs des freien Randes jedes Streifens müssen sowohl die betreffenden Normalspannungen als auch die Schubspannungen verschwinden; somit muß

$$\left. \begin{array}{l} \text{für } y = -b: \quad (\sigma_y)_{y=-b} = 0, \quad (\tau_{xy})_{y=-b} = 0; \\ \text{für } z = c: \quad (\sigma_z)_{z=c} = 0, \quad (\tau_{xz})_{z=c} = 0 \end{array} \right\} \quad (8)$$

sein. Im Hinblick auf die Gl. (5/2), (5/3), (7/2) und (7/3) sind diese Bedingungen für jedes x erfüllt, wenn folgende Beziehungen bestehen

$$\left(\frac{1-\mu}{1+\mu} - \alpha b \right) + (A_1 \mathfrak{Cof} \alpha b + B_1 \alpha b \mathfrak{Sin} \alpha b - C_1 \mathfrak{Sin} \alpha b - D_1 \alpha b \mathfrak{Cof} \alpha b) = 0, \quad (9/1)$$

$$- \left(\frac{2}{1+\mu} - \alpha b \right) + (A_1 + B_1) \mathfrak{Sin} \alpha b + B_1 \alpha b \mathfrak{Cof} \alpha b - (C_1 + D_1) \mathfrak{Cof} \alpha b - D_1 \alpha b \mathfrak{Sin} \alpha b = 0, \quad (9/2)$$

$$A_2 \mathfrak{Cof} \alpha c + B_2 \alpha c \mathfrak{Sin} \alpha c + C_2 \mathfrak{Sin} \alpha c + D_2 \alpha c \mathfrak{Cof} \alpha c = 0, \quad (9/3)$$

$$(A_2 + B_2) \mathfrak{Sin} \alpha c + B_2 \alpha c \mathfrak{Cof} \alpha c + (C_2 + D_2) \mathfrak{Cof} \alpha c + D_2 \alpha c \mathfrak{Sin} \alpha c = 0. \quad (9/4)$$

II. Am Rande $y = +b$ des angeschlossenen Schenkels müssen die Normalspannungen verschwinden:

$$(\sigma_y)_{y=b} = 0. \quad (10)$$

Ebenso muß in $z = 0$ des abstehenden Schenkels

$$(\sigma_z)_{z=0} = 0 \quad (11)$$

sein. Diesen beiden Bedingungen wird gemäß (5/2) und (7/2) für jedes x mit

$$\left(\frac{1-\mu}{1+\mu} - \alpha b \right) + (A_1 \mathfrak{Cof} \alpha b + B_1 \alpha b \mathfrak{Sin} \alpha b + C_1 \mathfrak{Sin} \alpha b + D_1 \alpha b \mathfrak{Cof} \alpha b) = 0, \quad (9/5)$$

$$A_2 = 0 \quad (9/6)$$

entsprochen.

III. Aus Gleichgewichtsgründen müssen die Schubspannungen des angeschlossenen Schenkels in $y = +b$ und jene des abstehenden Schenkels in $z = 0$ gleich groß sein:

$$(\tau_{xy})_{y=b} = (\tau_{xz})_{z=0}.$$

Mit (5/3) und (7/3) folgt hieraus

$$\left(\frac{2}{1+\mu} - \alpha b \right) - [(A_1 + B_1) \mathfrak{Sin} \alpha b + B_1 \alpha b \mathfrak{Cof} \alpha b + (C_1 + D_1) \mathfrak{Cof} \alpha b + D_1 \alpha b \mathfrak{Sin} \alpha b] + (C_2 + D_2) = 0. \quad (9/7)$$

IV. Schließlich müssen die beiden Scheiben längs ihres gemeinsamen Randes gleiche Dehnungen ε_x aufweisen. Im Hinblick auf (10) und (11) kann diese Übergangsbedingung auch in der Form

$$(\sigma_x)_{y=b} = (\sigma_x)_{z=0}$$

geschrieben werden. Mit Benützung von (5/1) und (7/1) folgt hieraus

$$\left(\frac{3+\mu}{1+\mu} - \alpha b \right) + [(A_1 + 2B_1) \mathfrak{Cof} \alpha b + B_1 \alpha b \mathfrak{Sin} \alpha b + (C_1 + 2D_1) \mathfrak{Sin} \alpha b + D_1 \alpha b \mathfrak{Cof} \alpha b] - (A_2 + 2B_2) = 0. \quad (9/8)$$

4. Die Ermittlung der Parameterfunktionen

aus den acht Rand- und Übergangsbedingungen (9/1) bis (9/8).

Zunächst erhält man durch Addition bzw. Subtraktion der Gl. (9/1) und (9/5) die Beziehungen

$$\left(\frac{1-\mu}{1+\mu} - \alpha b \right) + (A_1 \mathfrak{Cof} \alpha b + B_1 \alpha b \mathfrak{Sin} \alpha b) = 0, \quad (12/1)$$

$$C_1 \mathfrak{Sin} \alpha b + D_1 \alpha b \mathfrak{Cof} \alpha b = 0 \quad (12/2)$$

und durch Ausführung derselben Operationen an (9/2) und (9/7) die Gleichungen

$$(C_1 + D_1) \mathfrak{Cof} \alpha b + D_1 \alpha b \mathfrak{Sin} \alpha b - \frac{1}{2} (C_2 + D_2) = 0, \quad (12/3)$$

$$\left(\frac{2}{1+\mu} - \alpha b \right) - [(A_1 + B_1) \mathfrak{Sin} \alpha b + B_1 \alpha b \mathfrak{Cof} \alpha b] + \frac{1}{2} (C_2 + D_2) = 0. \quad (12/4)$$

Unter Beachtung von (9/6) wird aus (9/5) und (9/8) die Bedingung

$$1 + (B_1 \mathfrak{Cof} \alpha b + D_1 \mathfrak{Sin} \alpha b) - B_2 = 0 \quad (12/5)$$

gewonnen, während die beiden Gl. (9/3) und (9/4) nunmehr lauten

$$B_2 \alpha c \mathfrak{Sin} \alpha c + C_2 \mathfrak{Sin} \alpha c + D_2 \alpha c \mathfrak{Cof} \alpha c = 0, \quad (12/6)$$

$$B_2 (\mathfrak{Sin} \alpha c + \alpha c \mathfrak{Cof} \alpha c) + (C_2 + D_2) \mathfrak{Cof} \alpha c + D_2 \alpha c \mathfrak{Sin} \alpha c = 0. \quad (12/7)$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen werden die Funktionen A_1 , B_1 , C_1 , D_1 und C_2 , D_2 durch B_2 ausgedrückt:

$$\left. \begin{aligned} C_2 &= \frac{2 \alpha^2 c^2}{\mathfrak{Sin} 2 \alpha c - 2 \alpha c} B_2, & D_2 &= - \frac{2 \mathfrak{Sin}^2 \alpha c}{\mathfrak{Sin} 2 \alpha c - 2 \alpha c} B_2, \\ A_1 &= - \frac{2 \alpha b \mathfrak{Sin} \alpha b}{\mathfrak{Sin} 2 \alpha b + 2 \alpha b} \left[\left(\frac{1-\mu}{1+\mu} - \alpha b \right) \left(\frac{1}{\alpha b} + \mathfrak{Tg} \alpha b \right) + \left(\frac{2}{1+\mu} - \alpha b \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\mathfrak{Sin}^2 \alpha c - \alpha^2 c^2}{\mathfrak{Sin} 2 \alpha c - 2 \alpha c} B_2 \right], \\ B_1 &= \frac{2 \mathfrak{Cof} \alpha b}{\mathfrak{Sin} 2 \alpha b + 2 \alpha b} \left[\left(\frac{1-\mu}{1+\mu} - \alpha b \right) \mathfrak{Tg} \alpha b + \left(\frac{2}{1+\mu} - \alpha b \right) - \frac{\mathfrak{Sin}^2 \alpha c - \alpha^2 c^2}{\mathfrak{Sin} 2 \alpha c - 2 \alpha c} B_2 \right], \\ C_1 &= \frac{2 \alpha b \mathfrak{Cof} \alpha b}{\mathfrak{Sin} 2 \alpha b - 2 \alpha b} \frac{\mathfrak{Sin}^2 \alpha c - \alpha^2 c^2}{\mathfrak{Sin} 2 \alpha c - 2 \alpha c} B_2, \\ D_1 &= - \frac{2 \mathfrak{Sin} \alpha b}{\mathfrak{Sin} 2 \alpha b - 2 \alpha b} \frac{\mathfrak{Sin}^2 \alpha c - \alpha^2 c^2}{\mathfrak{Sin} 2 \alpha c - 2 \alpha c} B_2. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Aus (12/5) ergibt sich schließlich mit (13)

$$\left. \begin{aligned} &B_2 \left[1 + \frac{\mathfrak{Sin}^2 \alpha c - \alpha^2 c^2}{\mathfrak{Sin} 2 \alpha c - 2 \alpha c} \frac{\mathfrak{Sin} 4 \alpha b - 4 \alpha b}{\mathfrak{Sin}^2 2 \alpha b - (2 \alpha b)^2} \right] = \\ &= 1 + \frac{2 \mathfrak{Cof} \alpha b}{\mathfrak{Sin} 2 \alpha b + 2 \alpha b} \left[\left(\frac{1-\mu}{1+\mu} - \alpha b \right) \mathfrak{Sin} \alpha b + \left(\frac{2}{1+\mu} - \alpha b \right) \mathfrak{Cof} \alpha b \right]. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

5. Die Spannungskomponenten des Scheibenwerkes.

Nach Einsetzen der Parameterfunktionen aus (13) und (14) in die Gl. (5) und (7) können die Spannungskomponenten der beiden Scheibenstreifen für den Einzellastangriff P berechnet werden. Hierbei erweist es sich als zweckmäßig, auch die Spannungskomponenten zunächst mit Hilfe von (13) durch die Parameterfunktion B_2 allein auszudrücken. Aus den Gl. (5) für die Spannungskomponenten im angeschlossenen Winkelschenkel erhält man dann mit Benützung von (13) und (3), bei gleichzeitiger Auswertung der jeweils ersten, von der Funktion F' herrührenden Integrale¹ die Ausdrücke:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1+\mu}{4 \pi \delta} P \left\{ \left(\frac{3+\mu}{1+\mu} \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2} \right) + \right. \\ &\quad + 2 \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{\mathfrak{Sin} 2 \alpha b + 2 \alpha b} \left[\left(\frac{1-\mu}{1+\mu} - \alpha b \right) (\mathfrak{Sin} \alpha b - \alpha b \mathfrak{Cof} \alpha b) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\frac{2}{1+\mu} - \alpha b \right) (2 \mathfrak{Cof} \alpha b - \alpha b \mathfrak{Sin} \alpha b) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (2 \mathfrak{Cof} \alpha b - \alpha b \mathfrak{Sin} \alpha b) \frac{\mathfrak{Sin}^2 \alpha c - \alpha^2 c^2}{\mathfrak{Sin} 2 \alpha c - 2 \alpha c} B_2 \right] \mathfrak{Cof} \alpha y + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\mathfrak{Cof} \alpha b}{\mathfrak{Sin} 2 \alpha b + 2 \alpha b} \left[\left(\frac{1-\mu}{1+\mu} - \alpha b \right) \mathfrak{Tg} \alpha b + \left(\frac{2}{1+\mu} - \alpha b \right) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\mathfrak{Sin}^2 \alpha c - \alpha^2 c^2}{\mathfrak{Sin} 2 \alpha c - 2 \alpha c} B_2 \right] \alpha y \mathfrak{Sin} \alpha y + \\
& + \frac{\alpha b \mathfrak{Cof} \alpha b - 2 \mathfrak{Sin} \alpha b}{\mathfrak{Sin} 2 \alpha b - 2 \alpha b} \frac{\mathfrak{Sin}^2 \alpha c - \alpha^2 c^2}{\mathfrak{Sin} 2 \alpha c - 2 \alpha c} B_2 \mathfrak{Sin} \alpha y - \\
& - \frac{\mathfrak{Sin} \alpha b}{\mathfrak{Sin} 2 \alpha b - 2 \alpha b} \frac{\mathfrak{Sin}^2 \alpha c - \alpha^2 c^2}{\mathfrak{Sin} 2 \alpha c - 2 \alpha c} B_2 \alpha y \mathfrak{Cof} \alpha y \} e^{-\alpha b} \sin \alpha x d\alpha, \quad (15/1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_y = & - \frac{1+\mu}{4\pi\delta} P \left\{ \left(\frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^2} \right) + \right. \\
& + 2 \int_0^\infty \left\{ \frac{\alpha b \mathfrak{Sin} \alpha b}{\mathfrak{Sin} 2 \alpha b + 2 \alpha b} \left[\left(\frac{1-\mu}{1+\mu} - \alpha b \right) \left(\frac{1}{\alpha b} + \mathfrak{Tg} \alpha b \right) + \left(\frac{2}{1+\mu} - \alpha b \right) - \right. \right. \\
& - \frac{\mathfrak{Sin}^2 \alpha c - \alpha^2 c^2}{\mathfrak{Sin} 2 \alpha c - 2 \alpha c} B_2 \left] \mathfrak{Cof} \alpha y - \frac{\mathfrak{Cof} \alpha b}{\mathfrak{Sin} 2 \alpha b + 2 \alpha b} \left[\left(\frac{1-\mu}{1+\mu} - \alpha b \right) \mathfrak{Tg} \alpha b + \right. \right. \\
& + \left(\frac{2}{1+\mu} - \alpha b \right) - \frac{\mathfrak{Sin}^2 \alpha c - \alpha^2 c^2}{\mathfrak{Sin} 2 \alpha c - 2 \alpha c} B_2 \left] \alpha y \mathfrak{Sin} \alpha y - \right. \\
& - \frac{\alpha b \mathfrak{Cof} \alpha b}{\mathfrak{Sin} 2 \alpha b - 2 \alpha b} \frac{\mathfrak{Sin}^2 \alpha c - \alpha^2 c^2}{\mathfrak{Sin} 2 \alpha c - 2 \alpha c} B_2 \mathfrak{Sin} \alpha y + \\
& \left. \left. + \frac{\mathfrak{Sin} \alpha b}{\mathfrak{Sin} 2 \alpha b - 2 \alpha b} \frac{\mathfrak{Sin}^2 \alpha c - \alpha^2 c^2}{\mathfrak{Sin} 2 \alpha c - 2 \alpha c} B_2 \alpha y \mathfrak{Cof} \alpha y \right\} e^{-\alpha b} \sin \alpha x d\alpha \right\}, \quad (15/2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{xy} = & \frac{1+\mu}{4\pi\delta} P \left\{ \left(\frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{y}{x^2+y^2} + \frac{2x^2y}{(x^2+y^2)^2} \right) + \right. \\
& + 2 \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{\mathfrak{Sin} 2 \alpha b + 2 \alpha b} \left[\left(\frac{1-\mu}{1+\mu} - \alpha b \right) \alpha b \mathfrak{Cof} \alpha b + \left(\frac{2}{1+\mu} - \alpha b \right) (\alpha b \mathfrak{Sin} \alpha b - \mathfrak{Cof} \alpha b) - \right. \right. \\
& - (\alpha b \mathfrak{Sin} \alpha b - \mathfrak{Cof} \alpha b) \frac{\mathfrak{Sin}^2 \alpha c - \alpha^2 c^2}{\mathfrak{Sin} 2 \alpha c - 2 \alpha c} B_2 \left] \mathfrak{Sin} \alpha y - \right. \\
& - \frac{\mathfrak{Cof} \alpha b}{\mathfrak{Sin} 2 \alpha b + 2 \alpha b} \left[\left(\frac{1-\mu}{1+\mu} - \alpha b \right) \mathfrak{Tg} \alpha b + \left(\frac{2}{1+\mu} - \alpha b \right) - \right. \\
& - \frac{\mathfrak{Sin}^2 \alpha c - \alpha^2 c^2}{\mathfrak{Sin} 2 \alpha c - 2 \alpha c} B_2 \left] \alpha y \mathfrak{Cof} \alpha y + \frac{\mathfrak{Sin} \alpha b - \alpha b \mathfrak{Cof} \alpha b}{\mathfrak{Sin} 2 \alpha b - 2 \alpha b} \frac{\mathfrak{Sin}^2 \alpha c - \alpha^2 c^2}{\mathfrak{Sin} 2 \alpha c - 2 \alpha c} B_2 \mathfrak{Cof} \alpha y + \right. \\
& \left. \left. + \frac{\mathfrak{Sin} \alpha b}{\mathfrak{Sin} 2 \alpha b - 2 \alpha b} \frac{\mathfrak{Sin}^2 \alpha c - \alpha^2 c^2}{\mathfrak{Sin} 2 \alpha c - 2 \alpha c} B_2 \alpha y \mathfrak{Sin} \alpha y \right\} e^{-\alpha b} \cos \alpha x d\alpha \right\}, \quad (15/3)
\end{aligned}$$

und aus den Gl. (7) für den abstehenden Winkelschenkel entstehen die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned}
\sigma_x = & \frac{1+\mu}{2\pi\delta} P \int_0^\infty \left[\mathfrak{Cof} \alpha z + \frac{\alpha z}{2} \mathfrak{Sin} \alpha z - \frac{2 \mathfrak{Sin}^2 \alpha c - \alpha^2 c^2}{\mathfrak{Sin} 2 \alpha c - 2 \alpha c} \mathfrak{Sin} \alpha z - \right. \\
& \left. - \frac{\mathfrak{Sin}^2 \alpha c}{\mathfrak{Sin} 2 \alpha c - 2 \alpha c} \alpha z \mathfrak{Cof} \alpha z \right] B_2 e^{-\alpha b} \sin \alpha x d\alpha, \quad (16/1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_z = & - \frac{1+\mu}{2\pi\delta} P \int_0^\infty \left[\frac{\alpha z}{2} \mathfrak{Sin} \alpha z + \frac{\alpha^2 c^2}{\mathfrak{Sin} 2 \alpha c - 2 \alpha c} \mathfrak{Sin} \alpha z - \right. \\
& \left. - \frac{\mathfrak{Sin}^2 \alpha c}{\mathfrak{Sin} 2 \alpha c - 2 \alpha c} \alpha z \mathfrak{Cof} \alpha z \right] B_2 e^{-\alpha b} \sin \alpha x d\alpha, \quad (16/2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{xz} = & - \frac{1+\mu}{2\pi\delta} P \int_0^\infty \left[\frac{1}{2} \mathfrak{Sin} \alpha z + \frac{\alpha z}{2} \mathfrak{Cof} \alpha z - \frac{\mathfrak{Sin}^2 \alpha c - \alpha^2 c^2}{\mathfrak{Sin} 2 \alpha c - 2 \alpha c} \mathfrak{Cof} \alpha z - \right. \\
& \left. - \frac{\mathfrak{Sin}^2 \alpha c}{\mathfrak{Sin} 2 \alpha c - 2 \alpha c} \alpha z \mathfrak{Sin} \alpha z \right] B_2 e^{-\alpha b} \cos \alpha x d\alpha. \quad (16/3)
\end{aligned}$$

Die Bedeutung von B_2 ist durch Gl. (14) gegeben.

6. Sonderfall: Gleichschenkeliger Winkel ($c = 2b$).

Im folgenden werden die Hilfsgrößen

$$\xi = \frac{x}{c}, \quad \eta = \frac{y}{c}, \quad (17/1)$$

sowie eine neue Integrationsvariable

$$t = \alpha b = \frac{\alpha c}{2} \quad (17/2)$$

eingeführt. Es ist somit

$$\alpha x = 2t\xi, \quad \alpha y = 2t\eta, \quad d\alpha = \frac{2}{c} dt. \quad (17/3)$$

Weiters werden die Beziehungen nicht für die Spannungen selbst, sondern für ihre Verhältnisswerte zu der gedachten, einer zentrischen Axialkraft entsprechenden Mittelspannung

$$\sigma_0 = \frac{P}{2c\delta} \quad (18)$$

angeschrieben. Für den angeschlossenen Winkelschenkel erhält man aus (15)

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_x}{\sigma_0} = & \frac{1+\mu}{2\pi} \left(\frac{3+\mu}{1+\mu} \frac{\xi}{\xi^2+\eta^2} - \frac{2\xi\eta^2}{(\xi^2+\eta^2)^2} \right) + \\ & + \frac{2(1+\mu)}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \left(\frac{1-\mu}{1+\mu} - t \right) \frac{\sin t - t \cos t}{\sin 2t + 2t} + \left(\frac{2}{1+\mu} - t \right) \frac{2 \cos t - t \sin t}{\sin 2t + 2t} - \right. \\ & - (2 \cos t - t \sin t) \frac{\sin 2t - 2t}{\sin 4t - 4t} B_2 \left. \right\} \cos 2t\eta + \left\{ \left(\frac{1-\mu}{1+\mu} - t \right) \frac{\sin t}{\sin 2t + 2t} + \right. \\ & + \left(\frac{2}{1+\mu} - t \right) \frac{\cos t}{\sin 2t + 2t} - \cos t \frac{\sin 2t - 2t}{\sin 4t - 4t} B_2 \left. \right\} 2t\eta \sin 2t\eta + \\ & + (t \cos t - 2 \sin t) \frac{\sin 2t + 2t}{\sin 4t - 4t} B_2 \sin 2t\eta - \\ & - \sin t \frac{\sin 2t + 2t}{\sin 4t - 4t} B_2 2t\eta \cos 2t\eta \left. \right\} e^{-t} \sin 2t\xi dt, \quad (19/1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_y}{\sigma_0} = & -\frac{1+\mu}{2\pi} \left(\frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{\xi}{\xi^2+\eta^2} - \frac{2\xi\eta^2}{(\xi^2+\eta^2)^2} \right) + \frac{2(1+\mu)}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \left(\frac{1-\mu}{1+\mu} - t \right) \frac{\sin t + t \cos t}{\sin 2t + 2t} + \right. \\ & + \left(\frac{2}{1+\mu} - t \right) \frac{t \sin t}{\sin 2t + 2t} - t \sin t \frac{\sin 2t - 2t}{\sin 4t - 4t} B_2 \left. \right\} \cos 2t\eta - \\ & - \left\{ \left(\frac{1-\mu}{1+\mu} - t \right) \frac{\sin t}{\sin 2t + 2t} + \left(\frac{2}{1+\mu} - t \right) \frac{\cos t}{\sin 2t + 2t} - \right. \\ & - \cos t \frac{\sin 2t - 2t}{\sin 4t - 4t} B_2 \left. \right\} 2t\eta \sin 2t\eta - t \cos t \frac{\sin 2t + 2t}{\sin 4t - 4t} B_2 \sin 2t\eta + \\ & + \sin t \frac{\sin 2t + 2t}{\sin 4t - 4t} B_2 2t\eta \cos 2t\eta \left. \right\} e^{-t} \sin 2t\xi dt, \quad (19/2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{xy}}{\sigma_0} = & \frac{1+\mu}{2\pi} \left(\frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{\eta}{\xi^2+\eta^2} + \frac{2\xi^2\eta}{(\xi^2+\eta^2)^2} \right) + \\ & + \frac{2(1+\mu)}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \left(\frac{1-\mu}{1+\mu} - t \right) \frac{t \cos t}{\sin 2t + 2t} + \left(\frac{2}{1+\mu} - t \right) \frac{t \sin t - \cos t}{\sin 2t + 2t} - \right. \\ & - (t \sin t - \cos t) \frac{\sin 2t - 2t}{\sin 4t - 4t} B_2 \left. \right\} \sin 2t\eta - \left\{ \left(\frac{1-\mu}{1+\mu} - t \right) \frac{\sin t}{\sin 2t + 2t} + \right. \\ & + \left(\frac{2}{1+\mu} - t \right) \frac{\cos t}{\sin 2t + 2t} - \cos t \frac{\sin 2t - 2t}{\sin 4t - 4t} B_2 \left. \right\} 2t\eta \cos 2t\eta + \\ & + (\sin t - t \cos t) \frac{\sin 2t + 2t}{\sin 4t - 4t} B_2 \cos 2t\eta + \\ & + \sin t \frac{\sin 2t + 2t}{\sin 4t - 4t} B_2 2t\eta \sin 2t\eta \left. \right\} e^{-t} \cos 2t\xi dt, \quad (19/3) \end{aligned}$$

Mit den erhaltenen Ergebnissen können nun die Spannungen in dem nach Abb. 1b angeschlossenen, gleichschenkeligen Winkelstab berechnet werden. Im folgenden wird die Ermittlung der Spannungen σ_x wiedergegeben.

7. Anschluß nach Abbildung 1 b.

Zunächst werden die Restspannungen $\Delta\sigma_x$ des Endquerschnittes $x = -v$ bestimmt, um zu sehen, wie weit der Randbedingung $\sigma_x = 0$ bereits entsprochen wird.

Es sei $v = 0.65c$. Die in Punkt I angreifende Zugkraft ergibt die gleichen Spannungen σ_x wie für $x = +0.65c$ (Abb. 2a), nur ist das Vorzeichen entgegengesetzt.

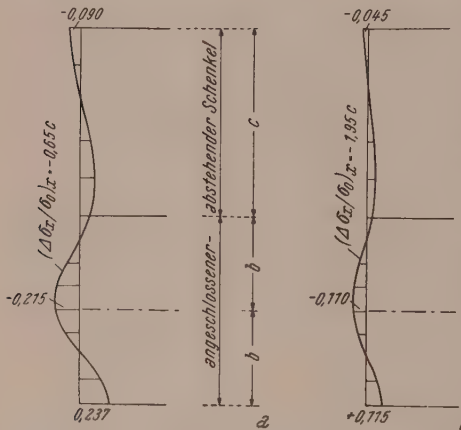


Abb. 4 a-b.

Die in Punkt II wirkende Gegenkraft P ruft in $x = -0.65c$ Spannungen σ_x hervor, die bereits mit jenen für $x = \infty$ (Abb. 2d) übereinstimmen. Die Zusammenlegung liefert die in Abb. 4a dargestellten Restspannungen $\Delta\sigma_x$. Wie es sein muß, bilden dieselben ein Gleichgewichtssystem. Zu ihrer Beseitigung müßten am Endquerschnitt die entsprechenden Gegenkräfte angebracht werden. Die Erledigung dieses Lastfalles bietet keine prinzipiellen Schwierigkeiten, doch ist die Ausrechnung der zugehörigen Zusatzspannungen verhältnismäßig umständlich. Nach dem Prinzip von de Saint Venant werden die Zusatzspannungen bis zum Anschlußquerschnitt $x = 0$ hin schon verhältnismäßig stark abgeklungen sein, weshalb dort bei der Beurteilung der Mitwirkung des abstehenden Winkelschenkels von der

Berücksichtigung dieser Zusatzspannungen abgesehen wird.

Im Anschlußquerschnitt $x = 0$ werden im abstehenden Schenkel von der in I angreifenden Kraft P die Spannungen $\sigma_x = 0$ und von der in II wirkenden Gegenkraft die Spannungen σ_x gemäß Abb. 2d hervorgerufen. Für die Resultierende dieser Spannungen σ_x erhält man mit σ_0 aus (18):

$$\frac{P}{2c\delta} \left[\frac{1}{2} (0.50 + 0.25)c\delta - 0.25c\delta \right] = \frac{P}{16},$$

gegenüber dem Anteil $P/2$, der sich bei gleichmäßiger Verteilung der Kraft P über den gesamten Winkelquerschnitt ergeben würde.

8. Anschluß nach Abbildung 1 c.

Die Rechnung wird unter Vernachlässigung der Stabeinspannung sowie unter der Annahme durchgeführt, daß sich die Zugkraft P auf die beiden Anschlußschweißungen jedes Stabendes gleichmäßig verteile. Zunächst werden wieder die Restspannungen $\Delta\sigma_x$ des Endquerschnittes $x = -1.95c$ ermittelt. Zu diesen liefern die in I und II angreifenden Teilkräfte $P/2$ die halben Werte der Spannungen nach Abb. 2a und 2c, und zwar mit umgekehrten Vorzeichen. Die in III und IV angreifenden Kräfte $P/2$ ergeben zusammen die in Abb. 2d dargestellten Spannungen σ_x . Die Zusammenlegung aller Teilbeträge liefert die in Abb. 4b wiedergegebenen Restspannungen $\Delta\sigma_x$.

Bei der Beurteilung der Mitwirkung des abstehenden Schenkels ist der Querschnitt $x \rightarrow 0$ zu berücksichtigen, weil durch diesen noch die volle Kraft P hindurchgeleitet wird. Die in I angreifende Kraft $P/2$ ruft im abstehenden Schenkel Spannungen σ_x hervor, die halb so groß sind wie die in Abb. 2b dargestellten. Die in II

wirkende Kraft $P/2$ liefert wieder $\sigma_x = 0$ und die in III und IV angreifenden Gegenkräfte $P/2$ ergeben zusammen Spannungen gemäß Abb. 2d (Resultierende $P/16$). Die Gesamtkraft die im Querschnitt $x = 0$ durch den abstehenden Schenkel hindurchgeleitet wird, besitzt demnach die Größe:

$$\frac{P}{4c\delta} \left[\frac{1}{2} (0.495 + 0.239) c \delta - 0.239 c \delta \right] + \frac{P}{16} \doteq \frac{3}{32} P,$$

gegenüber dem Kraftanteil $P/2$ bei gleichmäßiger Spannungsverteilung. Dieses Ergebnis stellt jedoch nur eine untere Grenze für den Kraftanteil des abstehenden Schenkels dar, gültig für den Fall, daß die Stabeinspannung nicht zur Geltung kommt. In Wirklichkeit ist immer eine mehr oder minder wirksame elastische Einspannung vorhanden, durch welche die Verteilung der Spannungen σ_x im betrachteten Querschnitt wesentlich verbessert wird

9. Schlußbemerkungen.

In gleicher Weise kann auch für ungleichschenkelige Winkelstäbe der Kraftanteil des abstehenden Schenkels im maßgebenden Querschnitt ermittelt werden. Eine Abschätzung ist auf Grund der für den gleichschenkeligen Winkel erhaltenen Zwischenergebnisse in folgender Weise möglich: es werden auf elementarem Wege, nach der Theorie erster Ordnung, die Normalspannungen σ_x für exzentrischen Zug bzw. Druck ermittelt, die unter der halben Normalkraft entstehen. Die Resultierende der auf den abstehenden Schenkel entfallenden Spannungen ergibt bereits den Kraftanteil dieses Schenkels im Falle des Anschlusses mit nur je einer Punktschweißung. Bei zwei Punktschweißungen erhöht sich dieser Kraftanteil um mindestens 50%.

Auch bei genieteten Anschlüssen ist mit einer ähnlich geringen Mitwirkung des abstehenden Winkelschenkels zu rechnen, wenn nur je ein Anschußniet vorgesehen wird. Bei Nietverbindungen, deren Reibungsschluß noch nicht überwunden ist, bestehen annähernd gleichartige Verhältnisse wie bei Punktschweißungen, da die Querschnittsschwächung zufolge des Nietloches nicht voll zur Geltung kommt.

(Eingegangen am 29. Januar 1952.)

Perspektiver Schnellriß.

Von R. Bereis, Wien.

Mit 6 Textabbildungen.

Zusammenfassung: Durch Verallgemeinerung des Eckhartschen Einschneideverfahrens können unter gewissen Voraussetzungen im allgemeinen nur kollinear verzerrte Zentralrisse gewonnen werden. Vorliegende Arbeit zeigt einen Weg zur Herstellung eines direkten Zentralnisses als Schnellriß durch affine Umformung der Ausgangsrisse.

Summary: Generalising the Eckhart method for rapid tracing of axonometric pictures yields, under certain conditions, central projections, but there will be, in general, collinear deformations. The paper gives a quick and direct method of obtaining a non-deformed central projection, using affine transformations of the initial projections.

Résumé: La généralisation de la méthode d'Eckhart pour le tracé rapide des images axonométriques permet, dans certaines conditions, d'obtenir des projections centrales, mais celles-ci seront, en général, déformées de façon collinéaire. L'auteur démontre la possibilité d'obtenir, grâce à un procédé directe et rapide, une projection centrale non déformée en passant par une transformation affine des projections données.

Einleitung.

L. Eckhart¹ leitete aus der Lehre der affinen Abbildungen ein einfaches zeichnerisches Verfahren zur Herstellung von schiefaxonometrischen Bildern (Schräg-

¹ L. Eckhart: Affine Abbildung und Axonometrie. S.-B. Akad. Wiss. Wien **146**, 51—56 (1937).

rissen) ab, das vor allem für die technische Praxis von großem Vorteil und in seiner Handhabung außerordentlich einfach ist. Die Konstruktionsvorschrift lautet: Man lege zwei affine Bilder eines Objektes K beliebig in die Zeichenebene, projiziere beide Bilder aus je einem Fernpunkt und schneide zugehörige Projektionsstrahlen (das sind Projektionsstrahlen durch die Bilder des gleichen Raumpunktes). Die Schnittpunkte liefern ein neues affines Bild von K . E. J. Nyström² betrachtete insbesondere die praktischen Anwendungsmöglichkeiten des Eckhartschen Verfahrens, gab Bedingungen dafür an, daß dasselbe einen Normalriß von K liefert, und erläuterte die Umkehr des Einschneidens, das „Ausrichten“.

Fr. Fabricius-Bjerre³ leitete durch projektive Verallgemeinerung des „Einschneideverfahrens“ (Schnellrißverfahrens) aus zwei linearen Bildern eines Objektes K in gewissen Fällen ein weiteres lineares Bild ab. Vorliegende Arbeit untersucht vor allem die Frage nach der Herstellung eines Zentralrisses im Schnellrißverfahren.

Als Repräsentant des dargestellten Objektes wird grundsätzlich ein Würfel gewählt, wodurch die Abbildung eines räumlichen Normalkoordinatensystems (der Ursprung sei die Würfecke A , die x, y, z -Achsen sollen in dieser Reihenfolge die Würfecken B, D, E tragen) bestimmt ist.

1. Lineare Abbildung.

Eine Abbildung der Punkte des R_3 auf geordnete Punktepaaire $(P'P'')$ einer Bildebene π mit der Eigenschaft, daß einer geraden Punktreihe im Raum zwei gerade, projektive Punktfolgen in π entsprechen, nennt man bekanntlich linear. Ihr analytischer Ausdruck lautet, bei Zugrundelegung homogener kartesischer Koordinaten

$$\left. \begin{aligned} \lambda' x_0' &= \sum_{i=0}^3 a_i' x_i, & \lambda'' x_0'' &= \sum a_i'' x_i, \\ \lambda' x_1' &= \sum b_i' x_i, & \lambda'' x_1'' &= \sum b_i'' x_i, \\ \lambda' x_2' &= \sum c_i' x_i, & \lambda'' x_2'' &= \sum c_i'' x_i. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Ein Bildpunktpaar $(P'P'')$ ist aber nicht willkürlich wählbar, sondern unterliegt, wie unschwer aus den Abbildungsgleichungen (1) durch Elimination der beiden Parameter λ', λ'' und der vier Koordinaten x_i abgeleitet werden kann⁴, der Einschränkung, daß die Bildpunkte P', P'' eines Raumpunktes P auf entsprechenden Strahlen (Ordnungsstrahlen) zweier projektiver Strahlbüschel (Ordnungsbüschel) mit den Scheiteln O_2', O_1'' (Ordnungspunkte) liegen müssen⁵.

2. Verallgemeinerung des Schnellrißverfahrens.

Liegen in der Bildebene π zwei Einschneidezentren Z_1, Z_2 vor, und ist $(P'P'')$ das Bildpunktpaar eines Punktes P zufolge einer linearen Abbildung des R_3 auf π , so soll der Schnittpunkt der Einschneidestralen $(Z_1P'), (Z_2P'')$ als Schnellriß P^s des Raumpunktes P definiert werden.

² E. J. Nyström: Zur praktischen Axonometrie. Soc. Sci. Fennica. Comment. phys.-math. 11, Nr. 11, 1–25 (1942).

³ Fr. Fabricius-Bjerre: Über lineare und quadratische Abbildungen des Raumes auf eine Ebene. Dansk Mat. Fys. Medd. 22, Nr. 5, 1–40 (1945).

⁴ L. Eckhart: Konstruktive Abbildungsverfahren, S. 9. Wien. 1926.

⁵ Vgl. die Ausdrücke, wie Kernstrahlbüschel, Kernpunkte und Kernstrahlen, nach G. Hauck, Neue Konstruktionen der Perspektive und Photographie. J. Math. 95 (1883).

Ein aus zwei linearen Bildern eines Objektes K^6 abgeleiteter Schnellriß K^8 ist im allgemeinen ein quadratisches Bild von K^7 . Im folgenden sollen solche Lagen zweier linearer Bilder eines Objektes K betrachtet werden, die einen linearen Schnellriß ermöglichen, wobei das Hauptaugenmerk stets darauf gerichtet sein wird, das Zeichenverfahren derart abzuändern, daß sich ein Zentralriß von K ohne kollineare Verzerrung ergibt. Diese Korrektur wird nicht durch eine Entzerrung des Schnellrisses vorgenommen, sondern durch eine einfache affine Transformation der Ausgangsrisse (Affinrisse) bewirkt werden.

3. Perspektive Ordnungsbüschel.

Wählt man bei perspektiver Lage der Ordnungsbüschel zweier linearer Bilder K' , K'' die Einschnidezentren Z_1, Z_2 auf der Hauptachse ($= O_2', O_1''$), so sind die beiden Einschnidebüschel, die zwei entsprechende gerade Punktreihen g', g'' (das heißt Bilder derselben Geraden g) projizieren, stets perspektiv, da die Hauptachse immer ein selbstentsprechender Strahl der beiden Büschel ist. Ihr Erzeugnis ist somit wieder eine gerade Punktreihe g^8 . Dies gibt

Satz 1: Wählt man bei perspektiver Lage der Ordnungsbüschel zweier linearer Bilder K', K'' eines Objektes K die beiden Einschnidezentren Z_1, Z_2 auf der Hauptachse (O_2', O_1''), so liefert das Schnellrißverfahren wieder ein lineares Bild K^8 von K .

Zwischen den drei Bildern K', K'', K^8 besteht jene besondere orientiert-projektiv-trilineare Verwandtschaft, bei der das Hauptachsendreieck in die dreifach zu zählende Gerade (O_2', O_1'') degeneriert.

Sonderfall: Stellen K', K'' affine Bilder von K dar, so sind die beiden Ordnungspunkte O_2', O_1'' Fernpunkte und die beiden Ordnungsbüschel liegen perspektiv, da die Ferngerade ein selbstentsprechender Strahl der beiden Büschel ist. Die beiden Einschnidezentren Z_1, Z_2 sind demnach ebenfalls als Fernpunkte zu wählen; das Schnellrißverfahren wird zum Eckhartschen Einschnideverfahren.

4. Konzentrische Ordnungsbüschel.

Liegen die Ordnungsbüschel zweier linearer Bilder K', K'' ohne identische Zuordnung konzentrisch ($O_2' = O_1''$), so existieren zwei Doppelstrahlen e, f , die reell getrennt, zusammenfallend oder konjugiert komplex sein können. Wählt man zwei reelle Punkte eines (reellen) Doppelstrahles als Einschnidezentren, so entsteht als Schnellriß K^8 wieder ein lineares Bild von K , da die zu zwei entsprechenden geraden Punktreihen g', g'' gehörigen Einschnidebüschel perspektiv sind, ist doch immer der Doppelstrahl, der die Einschnidezentren trägt, ein selbstentsprechender Strahl der beiden Büschel. Somit gilt

Satz 2: Wählt man bei konzentrischer Lage der Ordnungsbüschel zweier linearer Bilder K', K'' eines Objektes K die beiden Einschnidezentren Z_1, Z_2 auf einem der beiden Doppelstrahlen e, f , so ist der Schnellriß K^8 ein lineares Bild von K .

Sonderfall: Legt man Auf- und Kreuzriß eines Objektes K in verschiedenen Maßstäben gezeichnet derart in die Bildebene π , daß ihre Ordnerrichtungen übereinstimmen, so bestehen in diesem beachtenswerten Sonderfall die Ordnungsbüschel

⁶ Man erhält ein lineares Bild eines Objektes K durch kollineare Umformung eines Zentralbildes K^c . Zwei lineare Bilder, aus denen ein Schnellriß abgeleitet werden soll, müssen stets voneinander unabhängig sein, das heißt dürfen durch keine Kollineation ineinander überführbar sein.

⁷ Fr. Fabricius-Bjerre: A. a. O. und H. Köberl: Das Zentraleinschnideverfahren der Darstellenden Geometrie. Diss. Wien 1950.

aus gleich- oder ungleichlaufenden Parallelstrahlbüscheln derselben Richtung, deren Doppelemente die Ferngerade und jener eigentliche Ordner e sind, der das Ähnlichkeitszentrum zweier paralleler, homologer Strecken trägt. Somit besteht hier außer der Möglichkeit des Eckhartschen Einschneideverfahrens (zur Gewinnung eines affinen Bildes von K) auch noch die Möglichkeit, einen linearen Schnellriß durch Annahme der Einschneidezentren auf dem eigentlichen Doppelstrahl e zu gewinnen. Abb. 1 zeigt einen Schnellriß K^s , aus maßstäblich verschiedenem Auf- und Kreuzriß eines Würfels gewonnen. Mit Rücksicht auf eine spätere affine Abänderung werden die Punkte E, F, G, H mit Querstrichen bezeichnet. Der Doppelstrahl e trägt das Ähnlichkeitszentrum der beiden Bilder der Würfelkante AE und steht zu ihnen normal. K^s kann als Zentralriß eines aufrechten (Zeichenebene π als lotrecht gedacht) quadratischen Quaders aufgefaßt werden, dessen Diagonale AC zur Bildebene π normal steht, denn die zum Horizont h ($= Z_2Z_3 = e$) normale Lage der Strecken $A^s\bar{E}^s$ usw. folgt aus dem Schnellrißverfahren ebenso selbstverständlich, wie die Tatsache, daß das Bild der Basisdiagonale DB zu h parallel liegt. Dann schneidet aber die

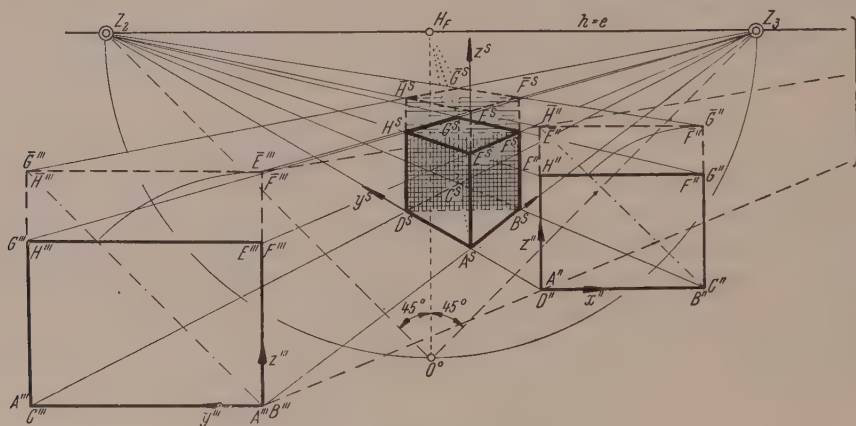


Abb. 1.

Gerade A^sC^s den Horizont im Halbierungspunkt der Strecke Z_2Z_3 , also im Hauptfluchtpunkt H_F . Aus Ähnlichkeitsgründen ist $D^sB^s\bar{F}^s\bar{H}^s$, das Bild des Diagonalschnittes $DBFH$, ein Quadrat.

Damit der Schnellriß einen direkten Zentralriß wiedergebe, genügt es, das Verfahren derart abzuändern, daß das Viereck $D^sB^s\bar{F}^s\bar{H}^s$ einem Würfeldiagonalschnitt ähnlich wird. Dies bewirkt die Maßstabänderung $\sqrt{2}:1$ aller lotrechten Strecken im Auf- und Kreuzriß. Es ist daher in diesen beiden Rissen das Verhältnis der Einheitsstrecken in den drei Achsenrichtungen $e_x:e_y:e_z = 1:1:\frac{1}{\sqrt{2}}$ zu wählen. Der aus diesen Affinrissen abgeleitete Schnellriß stellt einen direkten Zentralriß des Objektes K dar.

Die Grundspur g kann sodann parallel zum Horizont h derart angenommen werden, daß das Raumbild zum gegebenen Objekt kongruent wird.

5. Identische Ordnungsbüschel.

Bei identischen Ordnungsbüscheln zweier linearer Bilder K', K'' ist es naheliegend, die beiden Einschneidezentren Z_1, Z_2 auf demselben Ordnungsstrahl zu wählen, da auf diese Weise die Einschneidebüschel zweier entsprechender geraden Punktreihen g', g''

sich stets in perspektiver Lage befinden müssen, ist doch der gewählte Ordnungsstrahl immer selbstentsprechend. Mithin gilt

Satz 3: *Haben zwei lineare Bilder K', K'' identische Ordnungsbüschel, so liefert das Schnellrißverfahren bei Wahl der Einschneidezentren Z_1, Z_2 auf einem Ordnungsstrahl wieder ein lineares Bild von K .*

Sonderfall: Der Techniker steht häufig vor der Aufgabe, aus Auf- und Kreuzriß eines Objektes K eine perspektive Darstellung desselben abzuleiten. Dieses perspektive

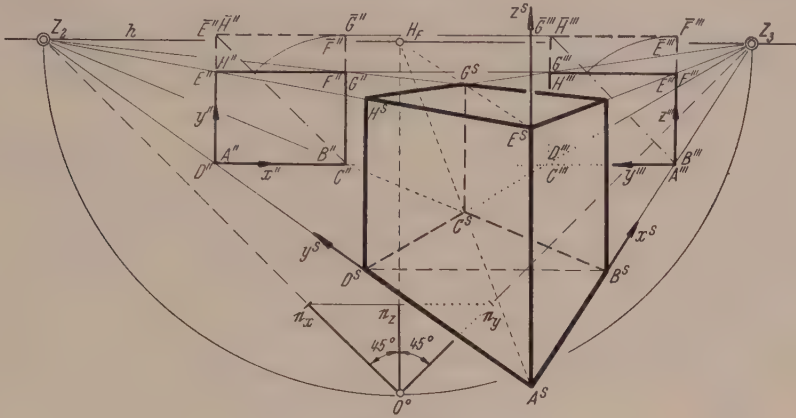


Abb. 2.

Bild kann als Schnellriß konstruiert werden, wenn man die Einschneidezentren Z_2, Z_3 auf einem Ordner annimmt. Z_2, Z_3 sind dann die Fluchtpunkte der perspektiven Darstellung, die allerdings nicht K selbst, sondern einen zu K in der z -Richtung

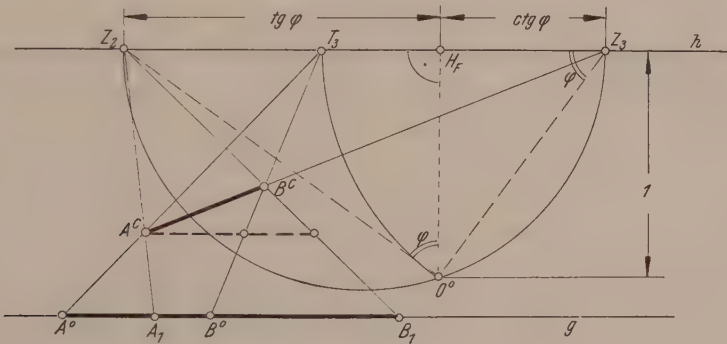


Abb. 3.

perspektiv affinen Körper wiedergibt. Dies läßt sich wieder durch Veränderung der Achsenmaßstäbe $(e_x : e_y : e_z = 1 : 1 : \frac{1}{\sqrt{2}})$ korrigieren (Abb. 2).

Besonderen praktischen Wert gewinnt das eben beschriebene Konstruktionsprinzip dadurch, daß eine weitere passende Änderung der Einheitsstrecken e_x, e_y, e_z in Auf- und Kreuzriß beliebige Drehungen des Raumbildes um die z -Achse bei perspektiv richtigen Bildern hervorruft.

Um dies zu zeigen, benötigen wir einen Hilfssatz: Projiziert man das Bild $A^c B^c$ einer horizontalen Strecke aus dem Fluchtpunkt der zu ihr normalen Richtung auf die Grundspur g , so erhält man eine Strecke $A_1 B_1$, die aus der wahren Länge $A_0 B_0$

(durch Projektion aus dem zugehörigen Teilungspunkt T_3 konstruierbar) mittels Division durch $\cos \varphi$ hervorgeht, wobei φ den Neigungswinkel von AB gegen die Bildebene π bedeutet.

Diesen Hilfssatz kann man direkt aus Abb. 3 ablesen, folgt doch aus Ähnlichkeitsgründen

$$\overline{A_1 B_1} : \overline{A_0 B_0} = \overline{Z_2 Z_3} : \overline{Z_3 T_3} = (\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{ctg} \varphi) : \frac{1}{\sin \varphi} = 1 : \cos \varphi.$$

Hat man demnach aus Auf- und Kreuzriß eines Objektes K in Mongescher Lage (identische Ordnungsbüschel) einen direkten Zentralriß im Schnellrißverfahren (perspektiver Schnellriß) herzustellen, und sollen alle zur Würfelkante AB parallelen Strecken (= x -Achsen parallele Strecken; Abb. 4) gegen die Bildebene π die Neigung φ haben, so verwendet man zum Einschneiden einen solchen Affin-

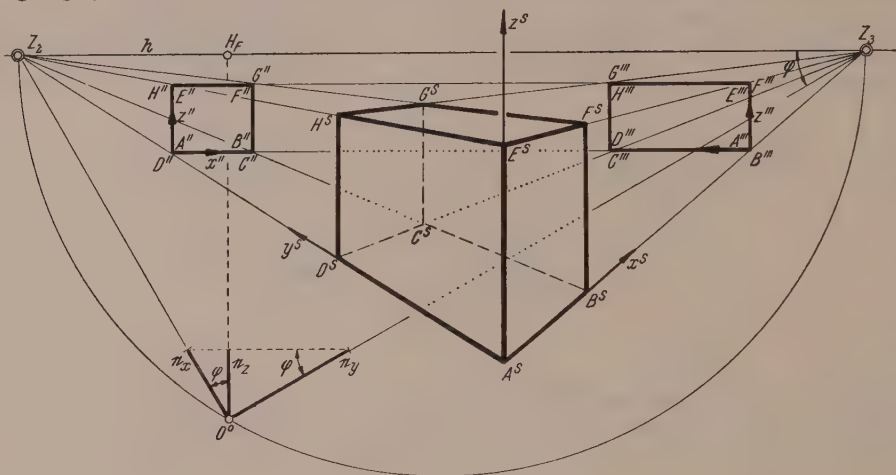


Abb. 4.

Auf- und Affin-Kreuzriß, die aus dem gewöhnlichen Auf- und Kreuzriß durch die Maßstabmodulation

$$e_x : e_y : e_z = : \frac{1}{\cos \varphi} : \frac{1}{\sin \varphi} : 1 \quad (2)$$

oder

$$\frac{1}{e_x^2} + \frac{1}{e_y^2} = \frac{1}{e_z^2} \quad (3)$$

entstehen.

Da das bei O° (= Umlegung des Augpunktes) rechtwinklige Dreieck $Z_2 O^\circ Z_3$ bei Z_3 den Winkel φ aufweist, lassen sich die erforderlichen Umzeichnungen einfach durchführen. Man legt vorteilhafterweise die wahre Länge der abzubildenden Strecke in die Gerade $O^\circ H_F$ (Abb. 4) und erhält durch eine h -Parallele auf den beiden Katheten die für Auf- und Kreuzriß transformierten Längen.

Umgekehrt ist nach Wahl der Einschneidezentren auf einem Ordner und nach Annahme der Einheitsstrecken e_x, e_y die innere Orientierung des Bildes festgelegt.

6. Schnellrißverfahren zweiter Art.

Alle bisher besprochenen Schnellrißverfahren gingen von zwei regulären⁸ linearen Bildern eines Objektes K aus. Läßt man hingegen auch singuläre⁸ lineare Bilder

⁸ Eine reguläre lineare Abbildung des projektiven, dreidimensionalen Raumes erhält man dadurch (s. auch Anm. 6), daß man den R_3 aus einem Auge O_1 auf eine Bildebene π_1 projiziert und π_1 kollinear in eine Ebene π transformiert. — Erfolgt hingegen die kollineare Abbildung von π_1 auf eine Gerade a , so heißt diese Abbildung des R_3 auf a singulär.

zu, so ergeben sich durch Kombination von regulären und singulären Abbildungen, wie Fr. Fabricius-Bjerre⁹ gezeigt hat, eine Fülle neuer Möglichkeiten für einen linearen Schnellriß.

Da vorliegende Arbeit aber besonderen Wert auf einfache Zeichenarbeit legt und als Konstruktionsergebnis ein Zentralriß des betrachteten Objektes angestrebt wird, soll hier auf diese erwähnten Möglichkeiten nicht weiter eingegangen, sondern nur der sogenannte „schiefe Fall“ (ein Bild regulär, das andere singulär), den Fr. Fabricius-Bjerre nur kurz gestreift hat, in einem Sonderfall betrachtet werden.

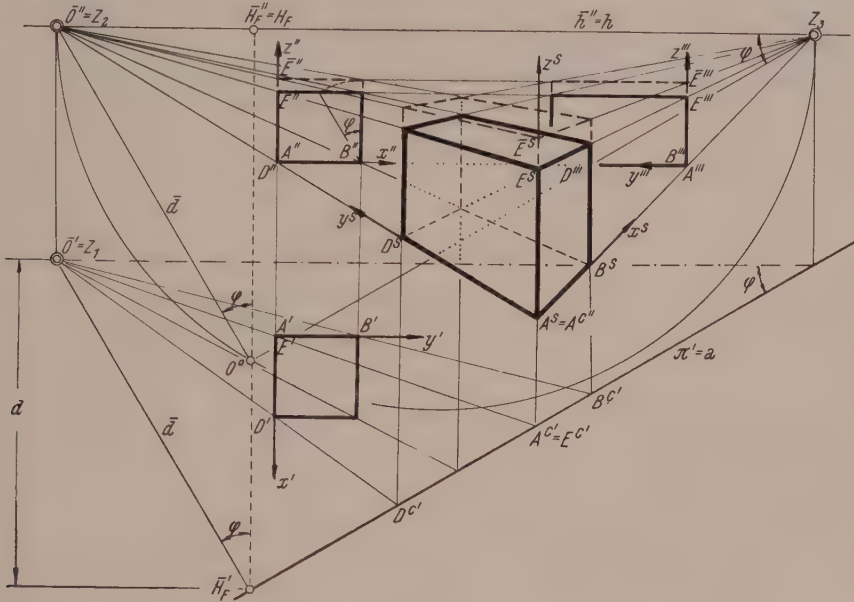


Abb. 5.

Wir gehen zu diesem Zweck von einem der ältesten Verfahren des perspektiven Zeichnens, von der Durchschnittmethode¹⁰ aus, legen das Auge \bar{O} ($\bar{O}' = Z_1$, $\bar{O}'' = Z_2$) und die Bildebene π in Grund- und Aufriß (K', K'' in Mongescher Lage) fest (Abb. 5). Die lotrechte Bildebene π ($\pi' = a$) sei gegen die Zeichenebene unter dem Winkel φ geneigt, die Distanz sei \bar{d} . Um das Zentralbild des Punktes A zu erhalten, legen wir durch ihn den Sehstrahl $[\bar{O}A]$ und konstruieren seinen Schnittpunkt A^c mit π . Dieses Verfahren auf alle übrigen Punkte von K angewendet, liefert zunächst Auf- und Grundriß ($K^c, K^{c'}$) des in π befindlichen Zentralrisses K^c . Man kann $K^{c'}$ auch als einen Schnellriß deuten, der durch Einschneiden aus dem singulär-linearen Bild $K^{c'}$ (Einschneidezentrums = Fernpunkt der lotrechten Ordner) und aus K'' (Einschneidezentrums = $\bar{O}'' = Z_2$) entstanden ist (schiefer Fall).

Das Bild $K^{c'}$ hat gegenüber dem direkten Zentralriß in π in der Richtung des Horizontes die affine Verzerrung $1 : \cos \varphi$ erfahren. Statt nun $K^{c'}$, wie bisher üblich, zu entzerren, korrigieren wir die affine Verzeichnung einfacher durch eine im Aufriß vorzunehmende z -Maßstabverkürzung $1 : \cos \varphi$. Der von diesem Affin-Aufriß abgeleitete Schnellriß K^s stimmt mit jenem Zentralriß überein, der durch Projektion des Objektes K aus \bar{O} bei einer Distanz $d = \bar{d} \cos \varphi$ auf eine zu π parallele Projektionsebene entsteht. Vereinigt man nämlich π mit der Aufrißebene derart, daß der Haupt-

⁹ A. a. O.

¹⁰ E. Müller-E. Kruppa: Darstellende Geometrie, 5. Aufl., S. 318. Wien. 1948.

punkt \bar{H}_F samt dem Horizont \bar{h} sich mit ihren Aufrissen \bar{H}_F'' , \bar{h}'' decken, so ist der zuletzt erhaltene Schnellriß $A^s, B^s, C^s, D^s, \dots$ ein direkter Würfelriß aus einem Auge O mit dem Hauptpunkt $H_F = \bar{H}_F''$, dem Horizont $h = \bar{h}''$ und der Distanz $d = \bar{d} \cos \varphi$.

Dieses Schnellrißverfahren mit gebrochenen Einschnaidestrahlen soll als Schnellrißverfahren zweiter Art gekennzeichnet werden. $a = \pi'$ heiße die Einschnaideachse.

Um den Zusammenhang zwischen dem in Abb. 4 beschriebenen Schnellrißverfahren (Schnellriß erster Art) und dem Schnellrißverfahren zweiter Art (Abb. 5) aufzuzeigen, suchen wir einen Affin-Kreuzriß K''' , so daß K^s (Abb. 5) aus K'' und K''' als Schnellriß erster Art abgeleitet werden kann. Dieser ergänzende Affin-Kreuzriß K'''

kann unmittelbar aus dem Affin-Aufliß K'' und K^s als Schnellriß erster Art gewonnen werden, wenn man für K'' den Fernpunkt des Horizontes h und für K^s den Fluchtpunkt der x -Achse ($= Z_3$) als Einschnaidezentrum wählt. Die damit aufgezeigte Kombinationsmöglichkeit der Schnellrißverfahren erster und zweiter Art bedeutet für eine Reihe von Konstruktionsaufgaben eine wesentliche Erleichterung, worauf aber in diesem Rahmen nicht näher eingegangen werden soll.

Die Konfiguration K', K'', K''', K^s läßt, wie Abb. 6 zeigt (das Objekt K ist hier nur durch die Strecke PQ repräsentiert), noch die Hinzunahme eines vierten Risses K^{IV} zu (K''' , K^{IV} in Mongescher Lage mit lotrechten Ordnern), so daß das gleiche Bild K^s aus K''' und K^{IV} als Schnellriß zweiter Art abgeleitet werden kann. K^{IV} muß zu K''' und K'' dieselbe Lage haben, die in Abb. 5 K' gegenüber K'' bzw. K''' hat.

Demnach ist (Abb. 6) die neue Einschnaideachse b eine Parallele zu $O^\circ Z_2$; wir wählen sie durch Z_1 . Dadurch fällt das neue Einschnaidezentrum Z_4 in den Schnittpunkt der Parallelen zu $[Z_2 Z_3]$ durch Z_1 mit der Parallelen zu $[Z_1 Z_2]$ durch Z_3 . Zufolge der völlig analogen Konfiguration von ($K' K'' K'''$) und ($K^{IV} K''' K''$) kann man K^{IV} als einen im y -Maßstab gezeichneten Grundriß von K auffassen (K''' wird dabei als Aufliß gedeutet). Faßt man den Schnittpunkt U der beiden Einschnaideachsen a, b als erstes und zweites Bild eines Raumpunktes D auf, so ist $U = D' = D'' = D''' = D^{IV} = D^s$. D ist daher gemeinsamer Deckpunkt¹¹ aller fünf Bilder $K', K'', K''', K^{IV}, K^s$ von K . Jeder Punkt T von π , dessen Grundriß T' in der Einschnaide a liegt (z. B. $T' = P_a$), hat sein viertes Bild T^{IV} in der Einschnaideachse b . Da ferner $\overline{UT^{IV}} = \overline{UT'} \operatorname{ctg} \varphi$ ist, führt die Drehstreckung mit dem Zentrum U , dem Drehwinkel $\frac{\pi}{2}$ und dem Streckungsverhältnis $1 : \operatorname{ctg} \varphi$ K' in K^{IV} über.

¹¹ E. Müller-E. Kruppa: Die linearen Abbildungen, S. 135ff. 1923.

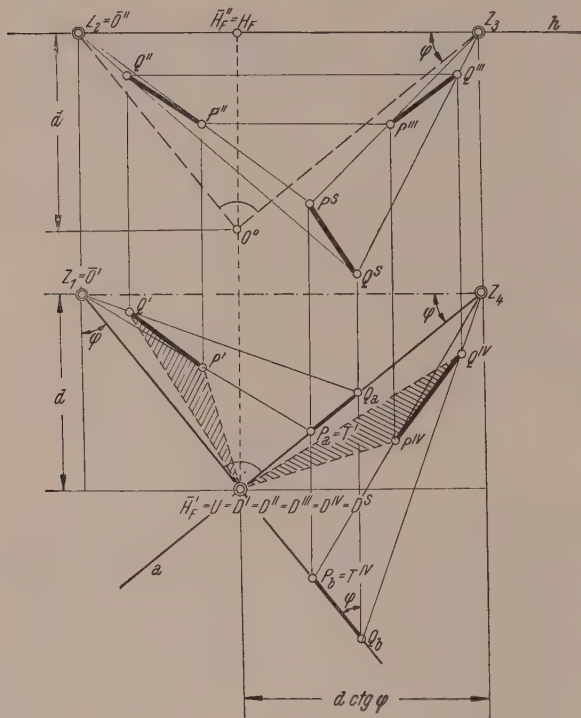


Abb. 6.

Aus den vier affinen Rissen K' , K'' , K''' , K^{IV} von K kann man in Abb. 6 das direkte Zentralbild K^s von K auf fünf verschiedene Arten aus je zweien von ihnen mittels des Schnellrißverfahrens erhalten; nur die Paarung K' , K^{IV} ist nicht zu verwerten, da sich diese beiden Risse, wie bereits erwähnt, in einer Drehstreckung entsprechen¹². Zwischen den übrigen Bildpaaren bestehen folgende Beziehungen:

1. Die Bilder der Paare (K'', K') , (K''', K'') , (K''', K^{IV}) , (K'', K^s) , (K''', K^s) besitzen paarweise identische Ordnungsbüschel,
2. die Bilder der Paare (K', K''') , (K'', K^{IV}) stellen affine Risse von K dar,
3. die Bilder der Paare (K', K^s) , (K^{IV}, K^s) bilden paarweise ein allgemeines Zweibildersystem (das erste Paar besitzt die Perspektivitätsachse a und als Ordnungspunkte Z_1 und den Fernpunkt der lotrechten Ordner, das zweite Paar die Perspektivitätsachse b und als Ordnungspunkte Z_4 und den Fernpunkt der lotrechten Ordner).

(Eingegangen am 19. Februar 1952.)

Buchbesprechungen.

Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen. Von *L. Collatz*. (Mathematik und ihre Anwendungen in Physik und Technik. Herausgegeben von E. Kamke und A. Kratzer. Reihe A: Band 19.) Mit 137 Textabb. und 15 Tafeln, XVII, 466 S. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig. K.-G. 1949. DM 29.—, geb. DM 31.—.

Das Problem der Berechnung von Eigenwerten ist eines der Hauptprobleme der angewandten Mathematik, dessen Bedeutung noch im Steigen begriffen ist. Es ist daher erfreulich, daß man beim Studium dieser Probleme nicht mehr auf Einzelarbeiten angewiesen ist, sondern eine zusammenfassende Darstellung von einem Autor erschienen ist, der ein ausgezeichneter Kenner der theoretischen Grundlagen ist und eine große Erfahrung in der numerischen Behandlung dieser Probleme besitzt, und diese seine Erfahrung auch in vollem Maße dem Leser zugute kommen läßt. In seinem Buch werden vor allem Probleme der technischen Mechanik, Schwingungsprobleme und Ausweichprobleme behandelt, die Anwendungen in der modernen Atommechanik werden nur gestreift.

Da das Buch sich in erster Linie an den Ingenieur wendet, hat der Verfasser sicher gut daran getan, zunächst einige Beispiele über Ausweichprobleme und Schwingungsaufgaben zu besprechen und eine Erläuterung der mathematischen Hilfsmittel vorzuschicken, bevor er auf die eigentliche mathematische Theorie eingeht. Vom historischen Standpunkt wäre es vielleicht gut gewesen, wenn der Verfasser auch auf die Probleme der schwingenden Saite und die Chladnischen Klangfiguren hingewiesen hätte, da diese Probleme sicher in vieler Beziehung bei der Ausgestaltung der Theorie anregend gewirkt hatten.

Wie der Verfasser in der Einleitung erwähnt, sind die drei wichtigsten Wege, auf denen man die Theorie der Eigenwertprobleme begründen kann, die folgenden:

1. Der Weg der Differentialgleichung,
2. der Weg der Integralgleichung,
3. der Weg der Variationsrechnung.

Er selbst beschreitet im 3. Kapitel im Anschluß an Kamke den ersten Weg (Minimaleigenschaften, Einschließungssatz, Entwicklungssatz), sagt aber in der Einleitung selbst, daß die Minimaleigenschaften der Eigenwerte auf einem vielleicht für manchen Leser noch etwas ungewohnten, aber nicht schwierigeren Wege bewiesen werden. Wenn man auch den Standpunkt des Autors als sehr berechtigt anerkennt, so ist anderseits hier doch zu bedenken, daß die formale Anwendung der Variationsrechnung und die oben erwähnten akustischen Probleme diese Minimaleigenschaft sofort ahnen läßt. Überlegungen von heuristischem Wert sollte man, wie der Unterzeichnete glaubt, nicht verschweigen, die von ihnen ausgeht, ist zweifellos immer wertvoll und wird das Interesse des Lesers für den Gegenstand nur fördern. Es würde ja vollkommen genügen, diesen heuristischen Standpunkt an speziellen Beispielen zu erläutern.

Dem grundlegenden Kapitel über die mathematische Theorie der Eigenwerte folgen zwei weitere Kapitel über die numerische Behandlung von Eigenwertproblemen. Im 4. Kapitel werden die Grundgedanken von H. A. Schwarz und die an sie anknüpfenden Arbeiten besprochen und die darauf basierenden graphischen Verfahren. Das 5. Kapitel behandelt die Methode von

¹² S. Anm. 6.

Ritz und die damit verwandten Verfahren. Im 6. Kapitel werden die Eigenwertaufgaben bei Matrizen behandelt. Es ist sehr zu begrüßen, daß hier der Verfasser mit aller Gründlichkeit die nötigen algebraischen Grundtatsachen hervorhebt, da dieses Kapitel voraussichtlich durch die Anwendung moderner Großrechenmaschinen sehr an Bedeutung gewinnen wird. Daran schließt sich naturgemäß ein Kapitel über Differenzenverfahren, das sowohl für gewöhnliche, als auch für partielle Differentialgleichungen erörtert wird. Im Schlußkapitel werden weitere Methoden, insbesondere die Lord Rayleighsche Störungsrechnung behandelt.

Gewiß verlangt der Autor von seinem Leser ein nicht geringes Maß an Fleiß und Geduld bei der Durcharbeitung des Stoffes, aber er erleichtert ihm die Arbeit und entlohnt ihn für seine Mühe durch eine überaus reiche Auswahl an numerisch vollkommen durchgeführten Beispielen. Willkommen wird dem Leser auch die tabellarische Zusammenfassung von Rechenbehelfen und das Verzeichnis der behandelten Beispiele sein. Sehr erfreulich ist es auch, daß der Verfasser bestrebt ist, dem Leser die Forscherpersönlichkeiten in dieser Disziplin sozusagen persönlich vorzustellen. Er tut dies, indem er kurze biographische Skizzen einfügt. Auch finden sich im Buch die Bildnisse von Euler, Dirichlet, Cayley, Rayleigh, H. A. Schwarz, Hilbert, Ritz.

Es unterliegt keinem Zweifel, daß dieses wertvolle Buch einen dankbaren Leserkreis sowohl bei Ingenieuren als auch bei Mathematikern finden wird. *P. Funk, Wien.*

Kurze Zusammenfassung der Elektrizitätslehre. Eine Einführung des rationalisierten Giorgischen Maßsystems. Von *P. Cornelius*. Mit 11 Textabb., VIII, 89 S. Wien: Springer-Verlag. 1951. S 48.—, sfr. 10.40, \$ 2.40, DM 10.—.

Das Büchlein will erstens die Diskussion über elektrische Einheiten abschließen, zweitens den Leser auf die schnellste Art mit dem rationalisierten Maßsystem von Giorgi mit absolutem Volt und Ampere vertraut machen und drittens befürworten, daß „der Unterricht in der Elektrizitätslehre von der Schule bis hinauf zur Technischen Hochschule auf den in diesem Buche angegebenen Gedankengang umgeschaltet wird“.

Das Vorbild des Verfassers ist Prof. R. W. Pohl mit seiner Einführung in die Elektrizitätslehre, die von einfachen Versuchen ausgeht, um das Wesentliche deutlich zu machen und ohne viel Mathematik auskommt. Auch der Verfasser geht in seinem Buche von drei grundlegenden Versuchen aus, die die Leitung, die Kapazität und die Selbstinduktion betreffen, und in geänderter Form die Maxwellschen Gesetze ergeben. Dieser erste Teil ist auf 25 Seiten zusammengedrängt. Auf vier Seiten werden die mechanischen Kräfte in elektrischen und magnetischen Feldern behandelt und dann bricht der Verfasser wieder eine Lanze für das rationalisierte Maßsystem und seine Lehrmethode. Den zweiten Hauptteil des Buches bilden ausgewählte Kapitel aus der Elektrizitätslehre: Der Unterschied zwischen Feldstärke und Induktion im elektrischen und magnetischen Feld; der magnetische Kreis; elektrische und magnetische Polarisation; permanente Magnete usw. Am Schlusse werden Vergleichstabellen der Gleichungen verschiedener Maßsysteme gebracht und Tabellen zur Umrechnung aus anderen Maßsystemen in das rationalisierte Giorgische Maßsystem und umgekehrt.

Das Buch hat zweifellos seinen Reiz. Nur muß man mit der Elektrizitätslehre bereits vertraut sein, um es mit Vorteil lesen zu können. Eine solche Zusammenschau eines Wissensgebietes auf einem engen Raum nach bestimmten Richtlinien ist immer sehr zu begrüßen und wird vielen willkommen sein. Es hätte sich noch Platz sparen lassen, wenn der Verfasser seiner Begeisterung für seine eigene Lehrmethode nicht so oft Ausdruck verliehen hätte. *H. Sequenz, Wien.*

Prüfungs- und Übungsaufgaben aus der Mechanik des Punktes und des starren Körpers. Von *K. Federhofer*. In drei Teilen. I. Teil: Statik. 165 Aufgaben nebst Lösungen. Mit 243 Textabb., V, 130 S. 1950. S 34.—, sfr. 10.—, \$ 2.30, DM 9.60. — II. Teil: Kinematik und Kinetik des Punktes. 113 Aufgaben nebst Lösungen. Mit 105 Textabb., IV, 103 S. 1951. S 42.—, sfr. 10.—, \$ 2.30, DM 9.60. — III. Teil: Kinematik und Kinetik starrer Systeme. 149 Aufgaben nebst Lösungen. Mit 191 Textabb., V, 139 S. 1951. S 42.—, sfr. 10.—, \$ 2.30, DM 9.60. Wien: Springer-Verlag.

Die Aufgabensammlung soll — wie der Verfasser im Vorwort betont — die bekannte, heute nicht mehr erhältliche Aufgabensammlung seines Lehrers F. Wittenbauer ersetzen. Die Beispiele wurden entsprechend dem heutigen Entwicklungsstande der Theorie und gemäß den Erfordernissen der Ingenieurpraxis ausgewählt und gehen weit über den Rahmen der Sammlung Wittenbauers hinaus. Die Lösungen sind besonders in schwierigeren Fällen sehr ausführlich erörtert. Die Aufgaben sind so geordnet, daß jeweils alle wichtigen Prinzipien Anwendung finden. Eine Häufung gleichartiger Aufgaben ist vermieden; jedes einzelne Beispiel behandelt einen speziellen Fall. Das Buch bringt vor allem Aufgaben, die der praktisch tätige Ingenieur häufig zu lösen hat; es enthält aber auch Beispiele, die den Theoretiker interessieren. Am Beginn der einzelnen

Kapitel findet man meist eine Zusammenstellung der zur Anwendung gelangenden Lösungsmethoden, wodurch dem Werk abschnittsweise die Bedeutung eines Lehrbuches zukommt.

Die Statik enthält neben den allgemeinen Aufgaben auch solche, die bereits in das Gebiet der Baumechanik gehören. Bei den Fachwerken werden besonders jene Methoden besprochen, die anzuwenden sind, wenn der reziproke Kräfteplan nicht unmittelbar entwickelt werden kann. Auf die Heranziehung der Methode des unbestimmten Maßstabes wurde verzichtet. Sehr wertvoll sind einige Aufgaben über den Ausnahmefall. Beim räumlichen Kräftesystem wird durchwegs vektoriell gerechnet; für die graphischen Lösungen zieht der Verfasser das Abbildungsverfahren von Mayor und Mises heran, das er ausführlich erläutert. Im Abschnitt „Seil- und Kettenlinien“ finden sich Beispiele aus der Festigkeitslehre, wie die Bestimmung der Form eines durch Eigengewicht belasteten Gewölbes mit konstanter Normalspannung. Einige Aufgaben befassen sich mit der Stabilität des Gleichgewichtes.

Die Kinematik und Kinetik des Punktes enthält u. a. einen eigenen Abschnitt über die Wurfbewegung. Dort wird ein originales Verfahren zur Ermittlung des Zusammenhanges zwischen Anfangstangente, Kulminationspunkt und Schnitt mit der Grenzparabel gebracht. Ein besonderer Abschnitt behandelt die freien und erzwungenen Schwingungen, auch die nicht harmonischen, nebst Resonanzerscheinungen. Auch die Runge-Parabel wird hier besprochen.

Im dritten Band, der Kinematik und Kinetik starrer Systeme, finden wir zahlreiche Aufgaben aus dem Maschinenbau. Hervorzuheben sind hier jene Lösungsmethoden, bei welchen die Joukovsky-Hebel verwendet werden. Die Vektorrechnung wird herangezogen, soweit es zweckmäßig erscheint. Die Variationsprinzipien der Dynamik werden nicht benützt. Ein eigener Abschnitt befaßt sich mit kleinen Schwingungen, ein anderer mit der Bewegung veränderlicher Massen, die von anderen Autoren meist nur flüchtig oder überhaupt nicht behandelt werden. Den Abschluß bildet der Stoß und die plötzliche Fixierung.

Dem Verfasser ist es gelungen, einen vollwertigen und zugleich den neuesten Erkenntnissen angepaßten Ersatz für die Aufgabensammlung Wittenbauers zu schaffen. Sein Werk bietet dem Studierenden eine große Zahl lehrreicher Anwendungsbeispiele und dem Fachmann wertvolle und interessante Anregungen.

K. Girkmann, Wien.

Mechanische Schwingungen. Von J. P. den Hartog. Zweite Auflage. Übersetzt und bearbeitet nach der dritten amerikanischen Auflage von G. Mesmer. Mit 299 Textabb., XVI, 427 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag. 1952. Geb. DM 42.—.

Das Buch, das nach drei amerikanischen Auflagen nunmehr in der zweiten deutschen Auflage erscheint, ist so bekannt, daß es sich erübrigt, viel darüber zu sagen. Es ist ein sehr guter Behelf für Studierende und Ingenieure in der Praxis, die sich an Hand spezieller Probleme einen Überblick verschaffen wollen. Allerdings ist der Aufbau des Buches dem amerikanischen Hochschulunterricht angepaßt und entspricht daher nicht ganz dem bei uns üblichen Wunsche nach einer vollständigen strengen theoretischen Grundlegung. Hingegen findet der Leser eine große Auswahl von Anwendungsbeispielen aus den verschiedensten Gebieten der Technik, die, anschaulich und verständlich dargestellt, trotzdem aber mehr als bloße Rezepte sind. Natürlich kommt dadurch das gemeinsame Abstrakte etwas zu kurz. So kann das Buch wohl wertvolle Anregungen geben, aber es ist fraglich, ob es als eine in unserem Sinne ausreichende Anweisung zu selbständiger Weiterbildung auf dem heute außerordentlich wichtigen Forschungsgebiete der Schwingungslehre zu werten ist.

F. Magyar, Wien.

Elektromotoren. Ihre Eigenschaften und ihre Verwendung für Antriebe. Von W. Schuiskey. Mit 384 Textabb., XI, 506 S. Wien: Springer-Verlag. 1951. Geb. S 240.—, sfr. 49.60, \$ 11.40, DM 48.—.

Die elektromotorischen Antriebe sind in der Literatur ein stiefmütterlich behandeltes Gebiet. Es wird daher ein Buch, das die Elektromotoren im Zusammenhang mit den Antrieben bespricht, sehr willkommen sein.

Der Verfasser hat sich für die Abfassung eines solchen Werkes nicht nur durch eine große Zahl eigener Veröffentlichungen empfohlen, sondern auch durch seine Arbeit in der Industrie. So ist ein Buch entstanden, das dem Ingenieur bei der Planung, beim Entwurf und bei der Beurteilung elektromotorischer Antriebe ein guter Ratgeber ist.

Nach einleitenden Abschnitten über die Elektromotoren, ihre Wirkungsweise und Kennlinien wird der Anlauf der Motoren, die Anlaufzeit und Anlaufwärme behandelt; dann folgen die Drehzahlregelung, die Gleichlaufschaltungen, das Bremsen, die Erwärmung, Überlastbarkeit, der Wirkungsgrad und Leistungsfaktor und die Kommutierung. Die elektrischen Ausgleichsvorgänge beim Ein- und Ausschalten und beim Kurzschließen von Motoren und das Pendeln von Motoren sind nicht vergessen worden. Nun wendet sich das Buch den Antrieben zu und bringt Besonderheiten einiger Antriebe, den Schutz von Motoren, Schaltgeräte und Leitungen,

Schaltpläne und Beschreibungen der wichtigsten Antriebe. Ein Literaturverzeichnis mit 332 Anführungen schließt das Buch ab.

Eine Fülle von Daten und Kurven für die praktische Ausführung werden dieses Buch bald jedem, der sich mit elektromotorischen Antrieben beschäftigt, unentbehrlich machen. Und es ist sicherlich nicht zu viel behauptet, wenn gesagt wird, daß nach einem solchen Werk ein wirkliches Bedürfnis bestand.

H. Sequenz, Wien.

Gewöhnliche Differentialgleichungen. Durchgerechnete Beispiele. Von H. Watzlawek. VI, 70 S. Wien: F. Deuticke, 1952. S 36.—

In diesem Buch wird nicht die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen entwickelt. Es stellt nur ein durch zahlreiche konkrete Beispiele ergänztes Verzeichnis elementarer Lösungsmethoden für solche Gleichungen dar. In einem Abschnitt wird auch die Methode des Potenzreihenansatzes erläutert. Den Schluß bildet eine sich über einige Seiten erstreckende Tabelle wichtiger unbestimmter Integrale. Der Autor will mit diesem Buch ein Hilfsmittel zum Einexerzieren des reinen Lösungsformalismus und Übungsmaterial für das Studium eines eigentlichen Lehrbuches über diesen Gegenstand bereitstellen. Dadurch ist der Personenkreis, für den das Buch gedacht ist, völlig charakterisiert. Er umfaßt unsere Hochschüler und daneben etwa auch noch in der Praxis stehende Techniker. All diesen darf man zu dem angegebenen Zweck nur verlässliches Material zur Verfügung stellen. Das ist leider bei dem vorliegenden Buch durchaus nicht der Fall. Es sind Mängel zu verzeichnen, die leider die Verwirklichung aller im Vorwort angegebenen schönen und lobenswerten Absichten des Autors unmöglich machen. Ich möchte da nur auf S. 58 hinweisen, wo unter anderem steht:

$$\dots = \operatorname{Arsin} \frac{x}{a} = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2}),$$

also rechts — $\ln a$ fehlt, ein Mißverständnis, das durch das Weglassen der Integrationskonstanten verursacht wird, und auf etwas ganz Böses, nämlich auf die Nr. 248 (S. 32). Hier wird allen Ernstes empfohlen, gewöhnliche lineare, homogene Differentialgleichungen 2. Ordnung mit variablen Koeffizienten mit Hilfe des Ansatzes: $y = e^{\lambda x}$ zu lösen. Ja, dieser Lösungsweg wird sogar vorgeführt. Daß dabei manche elementare Regel der Differentialrechnung daran glauben muß, damit alles klappt, ist wohl nicht zu verwundern. In den anschließenden Nummern werden speziell solche Differentialgleichungen gelöst, wenn partikuläre Integrale gegeben sind. Das ist ansich in Ordnung. Nur wird sich der naive Benutzer vergeblich bemühen, mit der oben zitierten Methode 248 die angegebenen partikulären Lösungen zu finden. Das wird ihn sehr kränken und kein Selbstbewußtsein aufkommen lassen, wodurch aber bei einem Übungsbuch eine ganz verkehrte Wirkung erreicht wird.

Mathematikbücher sollen nur Mathematiker schreiben. Wenn sich ein Naturtalent an eine solche Aufgabe heranwagt, sollte es doch sein Werk von einem wirklichen Fachmann überprüfen lassen. Es wäre das die für alle Beteiligten beste und angenehmste Sicherung gegen diese peinlichen Unannehmlichkeiten bei der Aufdeckung solcher Schnitzer in einem fertigen Buch.

L. Peczar, Wien.

Berichtigungen.

Österreichisches Ingenieur-Archiv, Band VI (1952). R. v. Mises, Über einige Grundfragen der Hydrodynamik.

S. 81, Gleichung (15) lies: $\frac{d}{dt} \left(\operatorname{div} v + \frac{1}{\varrho} \frac{d\varrho}{dt} \right) = 0$; statt: $\frac{d}{dt} \left(\operatorname{div} v + \frac{1}{\varrho} \frac{dp}{dt} \right) = 0$.

Österreichisches Ingenieur-Archiv, Bd. V, Heft 4, 1951. C. Kämmerer: Stationäre Gasströmung durch ein gerades Rohr mit und ohne Wärmedurchgang und Reibung.

S. 348 in Gleichung (31) lies: $\frac{dq_s}{T_s}$; statt: $\frac{c_p}{T_s}$ und eine Zeile tiefer lies: $-\frac{\lambda c_p}{2d}$; statt: $-\frac{\lambda dq_s}{2d}$.

S. 367, 5. Zeile von oben lies: 1 504 500; statt: 10 504 500.

Die Übersetzungen der Zusammenfassungen wurden vom Dokumentations-Zentrum der Technik, Wien, durchgeführt.

Herausgeber und Eigentümer: Springer-Verlag in Wien I, Mölkerbastei 5. — Für den Inhalt verantwortlich: Prof. Dr. Franz Magyar, Wien IV, Technische Hochschule, Karlsplatz 13. — Druck: Manzsche Buchdruckerei, Wien IX, Lustkandlgasse 52.

In den letzten Wochen erschienen:

Kurzes Lehrbuch der Elektrotechnik. Von G. Oberdorfer, Dipl.-Ing. Dr. techn., o. Professor der Technischen Hochschule Graz. Mit 231 Textabbildungen. VII, 199 Seiten. Lex.-8°. 1952. S 72.—, DM 14.40, \$ 3.45, sfr. 15.—
Ganzleinen S 84.—, DM 16.80, \$ 4.—, sfr. 17.40

Trotz der großen Zahl elektrotechnischer Spezialwerke und kompendiöser Lehrbücher einerseits und volkstümlicher Einführungen andererseits hat bisher ein Buch gefehlt, in dem das Gesamtgebiet der Elektrotechnik in knapper, aber doch auch strengen Ansprüchen genügender Form behandelt wird. Hier liegt es aus der Feder des bekannten Verfassers des vierbändigen Lehrbuches der Elektrotechnik (Oldenbourg, München) vor. Es wendet sich ebenso an den angehenden Elektrotechniker, dem es einen ersten Überblick über das Gesamtgebiet vermittelt, wie an den großen Kreis von Wissenschaftlern, Technikern, Gewerbetreibenden usw., die ein solides elektrotechnisches Grundwissen benötigen.

Meßtechnik für Funkingenieure. Von Prof. Dipl.-Ing. Dr. techn. F. Benz, Graz. Mit 399 Textabbildungen und 13 Zahlentafeln. XVI, 513 Seiten. 1952. Ganzleinen S 246.—, DM 49.50, \$ 11.80, sfr. 51.30

Der bekannte Verfasser der „Einführung in die Funktechnik“ (Wien: Springer-Verlag 1950, 4. Auflage) und langjährige Leiter der Staatlichen Versuchsanstalt für Radiotechnik in Wien legt mit diesem Buch eine Gesamtdarstellung der Hochfrequenzmeßtechnik vor, in der er nicht nur die eigentlichen Meßmethoden, sondern auch die Prüf- und Untersuchungsmethoden der Funktechnik eingehend bespricht. Er wendet sich damit an den denkbar weitesten Interessentenkreis — vom Industrieingenieur und Studierenden der Hochfrequenztechnik bis zum wissenschaftlich arbeitenden Amateur. Bei der nahezu unabsehbaren Fülle des Stoffes und der Verschiedenartigkeit der Interessen war eine sorgfältige Abgrenzung und Auswahl des Gebotenen trotzdem unerlässlich. Der Verfasser hat sich dabei in erster Linie vom Standpunkt des Praktikers leiten lassen: auf die Ableitung von Formeln wurde fast überall verzichtet.

Elektroakustik. Musik und Sprache. Von Dr. techn. F. C. Saic, Wien. Mit 89 Textabbildungen. VI, 154 Seiten. 1952. Ganzleinen S 78.—, DM 16.—, \$ 3.80, sfr. 16.50

Das Buch stellt eine Einführung in den aktuellsten Problemkreis der Elektroakustik, der musikalischen und der Raumakustik, dar. Das Wesen von Sprache und Musik sowie die Erfordernisse für ihre elektroakustische Übertragung werden unter Zugrundelegung zahlreicher Meßkurven mit einem Minimum an mathematischem Aufwand erörtert. Die Stumpfschen Ergebnisse über die Rauigkeit des musikalischen Zusammenklingens bieten die Grundlage zu wertvollen Betrachtungen. Die Dynamikkompression und Expansion wird eingehend behandelt. Ein Kapitel über Raumakustik zeigt die enge Verbindung der Elektroakustik mit der Raumakustik auf und unterrichtet über die raumakustischen Maßnahmen, die für das Gelingen einer Tonübertragung entscheidend sind.

Elektrochemie. Theoretische Grundlagen und Anwendungen. Von Dr. G. Milazzo, Istituto Superiore di Sanità, Rom, Prof. Inc. für Elektrochemie an der Universität Rom. Neubearbeitung der ersten italienischen Auflage. Ins Deutsche übertragen von Dr. W. Schwabl, Wien. Mit 108 Textabbildungen. XIII, 419 Seiten. 1952. Ganzleinen S 180.—, DM 36.—, \$ 8.60, sfr. 37.40

„... Es ist erstaunlich, daß sich Milazzos Elektrochemie sowohl als Lehrbuch für den Studierenden eignet, das den logischen Aufbau des gesamten Wissensgebietes aufzeigt und die Zusammenhänge mit anderen Disziplinen, etwa mit der Thermodynamik oder der Physik, kurz und einleuchtend herstellt, als auch als eine Art Taschenbuch für den Praktiker, der durch die sehr zahlreichen und übersichtlichen Tabellen, etwa die ausführliche Zusammenstellung von Redoxspannungsreihen oder von typischen Daten gebräuchlicher Galvanostegiebäder, eine wichtige Unterstützung seiner Arbeiten finden wird...“ *Mikrochemie vereinigt mit Mikrochimica Acta*

Korrosionstabellen metallischer Werkstoffe geordnet nach angreifenden Stoffen. Von Dr. techn. F. Ritter, Leoben-Linz. Dritte, erweiterte Auflage. Mit 29 Textabbildungen. IV, 283 Seiten. 1952. Ganzleinen S 172.—, DM 34.50, \$ 8.20, sfr. 35.60

Zu beziehen durch jede Buchhandlung

In den letzten Wochen erschienen:

Die Gasturbine. Ihre Theorie, Konstruktion und Anwendung für stationäre Anlagen, Schiffs-, Lokomotiv-, Kraftfahrzeug- und Flugzeugantrieb. Von Dipl.-Ing. J. Kruschik, Rich. Klinger A. G., Wien-Gumpoldskirchen. Mit 153 Textabbildungen, 67 Tabellen und 9 Rechentafeln. XI, 469 Seiten. 1952. Ganzleinen S 315.—, DM 63.—, \$ 15.—, sfr. 65.—

Durch die Fortschritte auf dem Gebiete hochwarmfester Werkstoffe sowie durch die auf die Strömungsmaschine angewandte aerodynamische Forschung ist die Entwicklung der Gasturbine in den letzten Jahren so weit vorwärtsgedrungen worden, daß sie heute bereits der Dampfturbine und dem Kolbenmotor ernstlich Konkurrenz macht. Als Folge dieser raschen Entwicklung, die zum Teil geheim vor sich ging, sind sich heute noch viele im unklaren über die Funktion, den Aufbau und die Thermodynamik der modernen Gasturbine. Auf alle diese Fragen gibt das angekündigte Buch in einer auf die Bedürfnisse des Studierenden und Ingenieurs zugeschnittenen Form Antwort.

Die Kennlinien einer Freistrahlturbine im Triebgebiet sowie im Bremsgebiet und die Wirkungsgrade im Triebgebiet. Von Jagdish-Lal, Dr. sc. techn. (E. T. H. Zürich). Mit 57 Textabbildungen. 118 Seiten. Lex.-8°. 1952. Steif geheftet S 74.—, DM 14.70, \$ 3.50, sfr. 15.—

Das Schaufelrad im Modellversuch. Zwei Berichte der Schiffbautechnischen Versuchsanstalt in Wien. Von Dr. Ing. F. Gebers. Mit einem Beitrag von Prof. Dr.-Ing. e. h. Dr. Ing. F. Horn. Mit 59 Abbildungen im Text und auf 50 Tafeln. X, 61 Seiten. Din A 4. 1952. Steif geheftet S 150.—, DM 30.—, \$ 7.20, sfr. 31.—

Summeneinflußwerte für den einfachen Balken und den symmetrischen Zweifeldträger für Straßenbrücken. Von Dr. Ing. F. Schweda, Wien. Mit 46 Abbildungen im Text und in 10 Zahlen-tafeln. VI, 79 Seiten. 1952. Steif geheftet S 88.—, DM 17.70, \$ 4.20, sfr. 18.20

Ausgehend vom einfachen Balken werden für den symmetrischen Zweifeldträger für die Belastungsschemen von Straßenbrücken, die aus einem Einzelfahrzeug und einer vor und hinter diesem angeordneten Gleichlast bestehen, Tabellenwerte angegeben, mit deren Hilfe sich die größten Momente und Querkkräfte solcher Träger in ähnlich rascher Weise wie für eine felderweise gleichmäßige Vollbelastung ermitteln lassen. Auf den Einfluß der Veränderlichkeit des Trägheitsmomentes in der bei Stahlbetonträgern üblichen Form ist Rücksicht genommen.

Hochbaukonstruktionen. Rechnungsbeispiele aus der Praxis. Von R. John, Dipl. Ing., Stadtbaurat a. D., Salzburg. Mit 181 Textabbildungen und 47 Tafeln. VII, 208 Seiten. 1952. Ganzleinen S 135.—, DM 27.—, \$ 6.45, sfr. 28.—

Das Buch ist gleichzeitig ein Hilfsmittel für die Studierenden an technischen Lehranstalten und ein Nachschlagewerk für die im Berufe stehenden Baufachleute, indem es zeigt, wie verschiedene Bauaufgaben praktisch gelöst werden können. Der erste Teil umfaßt die Behandlung der Balken-träger auf zwei und mehreren Stützen mit verschiedenen Belastungen. Auf dieser Grundlage werden im zweiten Teil an Hand von über 100 Beispielen verschiedene Aufgaben der Hochbau-praxis einschließlich des Stahl- und Eisenbetonbaues durchgerechnet. Der dritte Teil enthält ausschließlich Tabellen, die aus verschiedenen Werken entnommen sind und alle Angaben ent-halten, die für die Berechnung erforderlich sind.

Blätter für Technikgeschichte. Herausgegeben vom Technischen Museum für Industrie und Gewerbe in Wien, Forschungsinstitut für Technikgeschichte. Schriftleitung: Dr. phil. J. Nagler, Wien. Dreizehntes Heft. Mit 26 Abbildungen. V, 72 Seiten. 1951. S 32.—, DM 6.30, \$ 1.50, sfr. 6.50

Inhalt: Dolch, P. Entwicklung und Stand der Stickstoffdüngerindustrie in Österreich. — Kurzel-Runtscheiner, E. Das Unterinntal, eine technikgeschichtliche Landschaft. — Alfred Collmann. — Mitteilungen und Berichte: Nagler, J. Nikola Tesla-Kongreß. — Kurzel-Runtscheiner, E. Technikgeschichtliche Bücherschau. — Stampfl, Therese. Gedenktage der österreichischen Technik-geschichte im Jahre 1952.

Zu beziehen durch jede Buchhandlung

Printed in Austria